

Conceitos de Relatividade Restrita

Michel Betz

3 de março de 2020

Preâmbulo

Este texto apresenta os principais conceitos cinemáticos básicos da Relatividade Restrita, quais sejam, a dilatação do tempo, a contração dos comprimentos e a lei de composição das velocidades colineares. O popular “paradoxo dos gêmeos” também é discutido.

A abordagem empregada foi desenvolvida pelo cosmólogo britânico Hermann Bondi e é conhecida na literatura como “cálculo k ”, por utilizar como quantidade básica, para estipular a relação entre dois observadores em movimento relativo, um fator adimensional para o qual Bondi adotou a notação k . Este fator nada mais é que o fator característico do efeito Doppler para a luz, ou seja, a razão entre os períodos de emissão, por um dos observadores, e de recepção, pelo outro observador, de sinais luminosos. Bondi demonstrou que o uso deste fator na análise de determinadas situações envolvendo a troca de pulsos de luz entre dois, ou mais, observadores permite uma dedução particularmente simples dos efeitos, a priori contraintuitivos, implicados pelos postulados da Relatividade Restrita.

No presente trabalho, cada situação relevante está apresentada e analisada sucessivamente, numa notação matemática (algébrica) genérica. Num apêndice, são considerados casos concretos de realização numérica destas situações. Diagramas de visualização dos movimentos envolvidos, no espaço-tempo, conhecidos como diagramas de Minkowski, são utilizados para ilustrar tanto as apresentações genéricas quanto os casos específicos ilustrativos.

Este texto acompanha um conjunto de animações computadorizadas que permitem visualizar na tela, para cada situação, os movimentos dos vários observadores, pulsos de luz e outras entidades, com construção dinâmica simultânea do diagrama de Minkowski e de uma tabela que registra os tempos de ocorrência dos principais eventos.

Capítulo 1

Alguns conceitos básicos

1.1 Introdução

Este capítulo define alguns conceitos básicos, indispensáveis para o desenvolvimento da cinemática relativística e que serão utilizados repetidamente em todos os argumentos. Ele também introduz uma representação gráfica dos movimentos, que facilitará a visualização das situações consideradas no estabelecimento das principais consequências dos princípios da Relatividade Restrita.

1.2 Evento

Um *evento* é algo que acontece em algum lugar, em algum instante. O seu nascimento, ou a emissão de um flash por uma máquina fotográfica, são exemplos de eventos. Evidentemente, trata-se, muitas vezes, de uma idealização válida se o fenômeno em questão teve curta duração e ocorreu numa região de pouca extensão espacial.

1.3 Observador

Um *observador* é alguém que observa e descreve eventos. Observadores distintos podem descrever o mesmo evento de maneira diferente. Deve-se enfatizar que não se trata aqui de diferenças subjetivas, e sim de diferenças racionalmente explicáveis, em especial em termos dos estados de movimento relativo dos observadores.

1.4 Referencial

Para descrever um evento com precisão, um observador utiliza um sistema de referência, ou *referencial*. Um referencial é constituído de um sistema de coordenadas de posição, utilizadas para especificar o lugar em que o evento ocorre, e de uma escala temporal, utilizada para especificar o instante em que o evento ocorre. Posições podem ser determinadas com uma fita métrica (para medir distâncias) e um teodolito (para medir ângulos). Tempos podem ser medidos com um relógio. Assim, concretamente, podemos associar um referencial a um observador equipado de uma fita métrica, um teodolito e um relógio. Observadores distintos atribuem, em geral, ao mesmo evento, posições diferentes e tempos diferentes.

1.5 Espaço-tempo

No estudo da relatividade, é frequentemente conveniente juntar o espaço de posição (tridimensional) e a escala de tempo (unidimensional) para formar um único espaço, chamado *espaço-tempo* (tetradimensional). A cada evento está associado um ponto no espaço-tempo. A história de um ente qualquer pode ser considerada como uma sucessão contínua de eventos. Portanto, tal história é representada no espaço-tempo por uma linha contínua, chamada *linha de mundo* do ente.

1.6 Diagrama de Minkowski

O espaço-tempo de eventos e as linhas de mundo de entes físicos, podem ser visualizados através de um *diagrama de Minkowski*. Não é possível desenhar em quatro dimensões, portanto precisamos “esquecer” no mínimo uma das direções na posição para fazer um diagrama de Minkowski. Já que uma folha de papel, ou a tela do computador, são superfícies bidimensionais, uma maior clareza é obtida no desenho se pudermos “esquecer” duas direções na posição. A condição para que isto seja possível é que todos os eventos considerados aconteçam no espaço **sobre a mesma linha reta**. Isto será o caso para todas as situações concretas consideradas neste texto.

Num diagrama de Minkowski, um evento é representado por um ponto. Definindo-se no diagrama um sistema de eixos ortogonais, o tempo de ocorrência do evento está medido ao longo de um dos eixos e a posição do evento ao longo do outro eixo. Neste texto, convencionamos que o tempo de ocorrência está dado em abscissa (eixo horizontal na tela do computador) e a posição está dada em ordenada (eixo vertical na tela). Deve-se enfatizar que **esta convenção é arbitrária e muitos livros-textos de relatividade, bem como artigos de pesquisa, utilizam a convenção inversa**. A convenção aqui adotada possui a vantagem de corresponder à representação gráfica usual de uma função, na qual os valores da variável estão indicados em abscissa e os valores correspondentes da função em ordenada. Num diagrama de Minkowski, a linha de mundo de um ente indica a variação da posição do ente como função do tempo.

Como será visto na apresentação dos postulados da Relatividade Restrita, a velocidade da luz no vácuo possui um papel de destaque nesta teoria, por tratar-se de uma constante

universal. Por esta razão, é conveniente utilizar uma unidade de distância relacionada com a unidade de tempo de maneira que *a velocidade da luz seja igual a um*. Um exemplo de uma unidade de distância deste tipo, comumente utilizada na Astronomia, é o *ano-luz*, que vem a ser a distância percorrida pela luz num ano. Obviamente, a velocidade da luz é então um ano-luz por ano. Com tais unidades, durante um intervalo de tempo unitário, um pulso de luz se desloca uma distância unitária. Consequentemente, *as linhas de mundo de pulsos de luz são retas inclinadas a 45 graus* num diagrama de Minkowski. De acordo com a Relatividade Restrita, nenhum corpo pode mover-se com velocidade superior à da luz. Portanto, num diagrama de Minkowski, nenhuma linha de mundo pode ter inclinação superior a 45 graus em relação à horizontal. Consequentemente, esses diagramas serão usualmente mais largos de que altos. Vale notar que esta característica resulta da escolha da direção horizontal para o eixo temporal e constitui-se numa motivação adicional para adotar esta convenção: o presente texto acompanha um programa de animação e a tela de um computador é, pelo menos na disposição mais usual, mais larga de que alta.

Já que as coordenadas de posição e de tempo dependem do referencial, deve-se sempre especificar qual observador está medindo os valores representados em abscissa e em ordenada num diagrama de Minkowski.

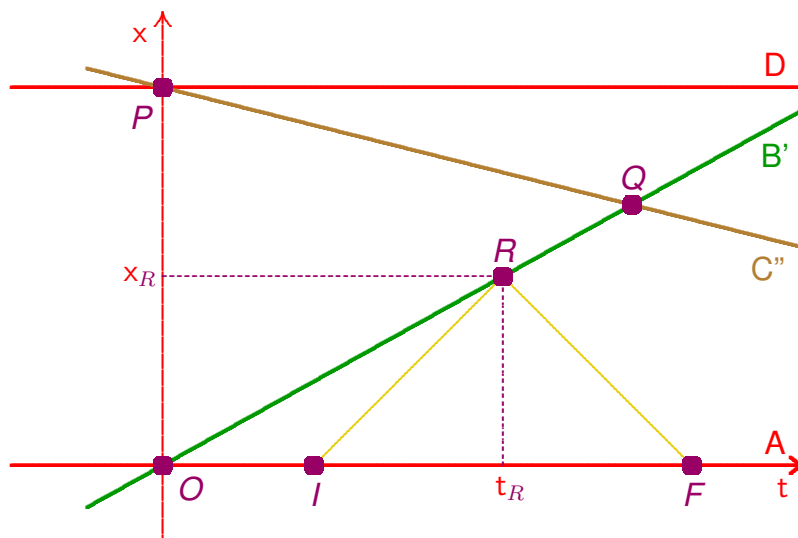


Figura 1.1: Exemplo de diagrama de Minkowski mostrando as linhas de mundo de 4 observadores e de um pulso de luz emitido por um dos observadores (A), refletido por um segundo observador (B') e recebido de volta pelo primeiro. As linhas de mundo dos observadores estão indicadas por letras maiúsculas regulares e os eventos por letras maiúsculas inclinadas na cor bordô. As linhas de mundo de pulsos de luz estão na cor amarela. No diagrama, estão indicadas ainda as coordenadas do evento de reflexão do pulso de luz, no referencial utilizado, que é aquele associado ao observador A.

A Figura 1.1 apresenta uma ilustração dos conceitos introduzidos acima. As linhas de mundo de quatro observadores denominados A, D, B' e C'' estão representadas. Os eixos de coordenadas indicam o tempo e as posições como determinados pelo observador A, ou ainda, no referencial utilizado, o observador A está em repouso, a sua posição não se modifica e, consequentemente, a sua linha de mundo é uma reta horizontal no gráfico. O mesmo é verdade do observador D, que não se movimenta em relação a A, apenas está

localizado em outro lugar. O observador B' passa pelo observador A no evento denotado O e, a partir deste momento, passa a afastar-se de A . Algum tempo após a passagem de B' , o observador A manda um pulso de luz que é refletido por B' e recebido de volta por A . Os eventos de emissão, reflexão e recepção deste pulso estão denotados por I , R e F , respectivamente. O quarto observador, C , cruza o observador D no evento denotado P e, a partir daí, passa a afastar-se de D e vir ao encontro de A e B' , cruzando este último no evento Q .

Vale a pena resumir as convenções adotadas na Figura 1.1, que serão sistematicamente utilizadas neste trabalho. Os eventos estão indicados por uma letra maiúscula em *fonte inclinada* e *cor bordô*. As linhas de mundo dos pulsos de luz estão representadas em *cor amarela*. A cada observador estão atribuídas uma letra maiúscula do começo do alfabeto em **fonte regular** e uma cor. Dois observadores que estão em repouso relativo recebem a mesma cor, mas dois observadores em movimento relativo recebem cores diferentes. Como o leitor pode ter dificuldade em distinguir cores, ou pode desejar imprimir o texto em preto e branco, uma convenção adicional, redundante com a cor, é ainda utilizada: os referenciais de observadores em movimento relativo estão distinguidos pelo números de “linhas” acompanhando os símbolos associados. No exemplo acima, usou-se os símbolos A e D , sem linha em nenhum deles, pois os observadores correspondentes estão em repouso relativo, mas usou-se B' , e não B , para indicar que o observador B' está em movimento em relação aos observadores A e D . Da mesma maneira, usou-se C para indicar que este observador está em movimento, tanto em relação a A e D quanto em relação a B' . Esta convenção será particularmente útil para distinguir as coordenadas atribuídas ao mesmo evento por dois observadores em movimento relativo. Por exemplo, as coordenadas de tempo e espaço atribuídas pelo observador A ao evento R de reflexão do pulso de luz seriam denotadas por t_R e x_R . Como, no diagrama da Figura 1.1, o sistema de coordenadas é aquele utilizado pelo observador A , estas coordenadas podem ser facilmente obtidas por projeções ortogonais sobre os eixos, como visto na figura. Já as coordenadas atribuídas por B' ao mesmo evento, que seriam denotadas por t'_R e x'_R , não podem ser facilmente visualizadas no gráfico embora, neste caso, sendo R um evento da vida de B' , se, como é natural, este escolher a sua própria posição como origem do seu sistema de coordenadas espaciais, ter-se-á $x'_R = 0$, evidentemente.

Capítulo 2

Introdução e Princípios

2.1 Introdução

Neste capítulo, são brevemente revisados alguns aspectos importantes da física clássica, em especial no que diz respeito ao movimento dos corpos e à propagação das ondas. Em seguida, são enunciados os dois postulados fundamentais da Relatividade, destacando as suas relações e diferenças com os conceitos clássicos previamente lembrados.

2.2 Mecânica Clássica

A mecânica clássica, ou mecânica newtoniana, estabelece as leis gerais de movimento dos corpos quando as suas velocidades são muito menores que a velocidade da luz.

A primeira lei de Newton afirma que existe uma classe de referenciais nos quais todos os corpos livres de influências de outros corpos estão em movimento retilíneo uniforme ou em repouso. Estes referenciais são chamados **referenciais inerciais**. Um referencial em movimento retilíneo uniforme em relação a um referencial inercial também é inercial.

Na mecânica newtoniana, **o tempo é absoluto**, ou seja, é o mesmo em todos os referenciais. **As leis da mecânica clássica são formuladas nos referenciais inerciais e são as mesmas em todos os referenciais inerciais.**

A segunda lei de Newton introduz o conceito de **força** para representar a influência de outro corpo sobre o movimento de um dado corpo. Ela afirma que **força produz aceleração**.

A mecânica newtoniana integra o **princípio de Galileu** segundo o qual não é possível, através da observação de fenômenos físicos acontecendo dentro de um laboratório, determinar se este está em movimento retilíneo uniforme ou em repouso.

No quadro conceitual da mecânica newtoniana, não há limite no valor que a velocidade de propagação de uma partícula ou sinal pode assumir. Assim, esta teoria admite a noção de influência instantânea a distância. Como enfatizado abaixo, na Relatividade de Einstein, uma teoria mais precisa e geral, há um limite na velocidade de propagação de qualquer sinal e o conceito de ação instantânea a distância reduz-se a uma aproximação válida apenas em certas circunstâncias.

2.3 Ondas num meio material

As leis de propagação das ondas materiais são normalmente *formuladas no referencial de repouso do meio de propagação*. Para uma onda sonora, por exemplo, a velocidade de propagação da onda em relação ao meio é uma propriedade característica deste meio.

Se o meio material de propagação estiver em movimento no referencial do observador, a velocidade de propagação observada para a onda resultará da combinação da velocidade do meio com a velocidade de propagação da onda em relação ao meio. Portanto a velocidade atribuída à onda pelo observador dependerá da velocidade do meio.

A frequência observada é afetada tanto pelo movimento do emissor como pelo movimento do detector, em relação ao meio de propagação.

2.4 Luz

A luz é um fenômeno ondulatório, mais precisamente, uma onda eletromagnética que, ao contrário do som, pode se propagar em regiões do espaço nas quais não há matéria. Todas as tentativas de identificar um meio de propagação (o hipotético *eter*) fracassaram e pode-se afirmar que a luz se propaga no vácuo.

2.5 Postulados da Relatividade Restrita

A Relatividade Restrita está essencialmente contida em dois postulados cujos enunciados são bastante simples:

- *Todas as leis da Física são válidas em todos os referenciais inerciais.*
- *A velocidade da luz no vácuo é uma constante universal*, independente da frequência e do movimento da fonte.

Porém, a aceitação simultânea desses dois postulados leva imediatamente a uma conclusão dramática: *a velocidade da luz possui o mesmo valor em todos os referenciais inerciais*. Tal conclusão está em contradição com as nossas noções intuitivas de combinação das velocidades mas a sua validade foi confirmada por um famoso experimento realizado por *Michelson e Morley*, que demonstraram que a velocidade da luz medida num laboratório terrestre não é afetada pelo movimento orbital da Terra em torno do Sol. Sendo assim, fica claro que o desenvolvimento da teoria da Relatividade Restrita irá exigir *uma revisão profunda dos* nossos *conceitos de espaço e de tempo*.

Apenas na base dos dois postulados enunciados acima, não seria descartada, a priori, a possibilidade de alguma partícula ou algum sinal propagar-se com velocidade superior à velocidade da luz. Tais entidades, conhecidas na literatura como *táquions*, têm sido objetos de numerosos estudos teóricos e buscas experimentais. Pode-se afirmar, porém, que não há evidência convincente da sua existência que, do ponto de vista teórico, seria bastante problemática pois implicaria na possibilidade de o futuro influenciar o passado. Esta questão

não será aprofundada aqui e será abraçada a hipótese adicional de que a velocidade da luz no vácuo constitui um limite intransponível, alcançado pelas ondas eletromagnéticas e possivelmente por outros campos ou partículas, mas nunca ultrapassado.

Capítulo 3

O fator k de Bondi

3.1 Introdução

No desenvolvimento da Relatividade Restrita, uma tarefa essencial é de estabelecer as relações entre medidas de tempo, distância, e outras grandezas associadas, realizadas por dois observadores inerciais. Para tanto, é preciso primeiro caracterizar o movimento de um dos observadores em relação ao outro. O procedimento mais usual é de estipular a velocidade relativa dos observadores. Porém, como já antecipado no capítulo anterior, o conceito de velocidade precisará, ele mesmo, ser reavaliado na Relatividade Restrita e invocá-lo desde o começo é discutível do ponto de vista conceitual e, na verdade, pouco conveniente na prática.

Procurando uma abordagem alternativa, o cosmólogo Hermann Bondi sugeriu começar por considerar pulsos de luz emitidos pelo primeiro observador e recebidos pelo segundo. A razão entre o intervalo de recepção e o intervalo de emissão desses pulsos, que Bondi alcunhou de **fator k** , pode ser adotada convenientemente como quantidade básica para especificar a relação entre os observadores. Se eles estiverem em repouso relativo, o fator k será, evidentemente, igual a um, mas se os observadores estiverem se afastando ou se aproximando um do outro, o valor de k será diferente de um. Basta imaginar uma sequência de pulsos emitidos (e, portanto, recebidos) a intervalos regulares, para poder interpretar o fator k como a razão entre os períodos de repetição das recepções e das emissões. O fato de tal razão diferir da unidade quando o receptor está em movimento em relação ao emissor nada mais é que o **efeito Doppler**, bem conhecido da física ondulatória clássica.

No presente capítulo, estão discutidas, na base dos postulados da Relatividade Restrita, algumas propriedades elementares do fator k , quantidade que será utilizada em todo o desenvolvimento para caracterizar a relação entre observadores em movimento relativo retilíneo e uniforme.

3.2 Situação

Sejam três observadores **A**, **B'** e **C**, tais que **C** esteja distante de **A** mas em repouso em relação a **A** e que **B'** esteja se afastando de **A** e se aproximando de **C**. Cada observador carrega um relógio e os observadores **A** e **B'** também carregam dispositivos capazes de emitir pulsos de luz a intervalos regulares.

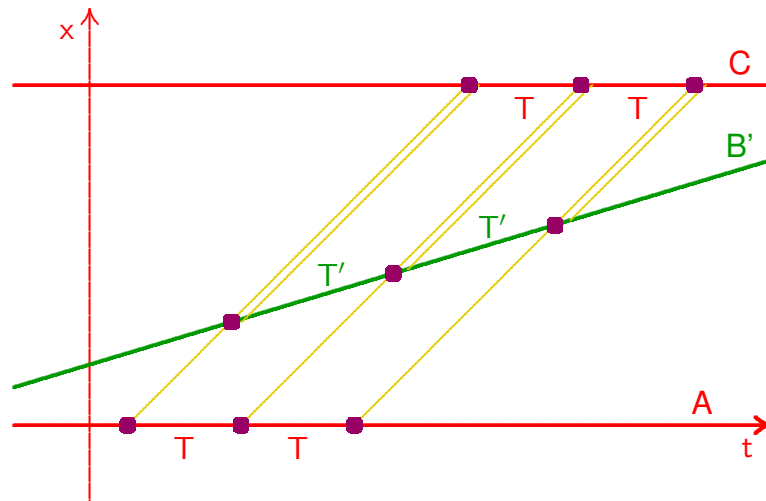


Figura 3.1: Diagrama de Minkowski mostrando a situação considerada na introdução e discussão do fator de Bondi. Os observadores **A** e **C** estão distantes mas em repouso um em relação ao outro. O observador **B'** está se afastando de **A** e se aproximando de **C**. As linhas de mundo desses três observadores estão representadas no sistema de coordenadas associado ao referencial de **A**. As linhas de mundo dos pulsos de luz emitidos por **A** e **B'** também estão desenhadas. Os eventos de emissão e detecção dos pulsos de luz estão representados por pontos na cor bordô.

O observador **A** emite pulsos de luz separados por intervalos de tempo iguais T (medidos pelo relógio de **A**)

Esses pulsos são recebidos por **B'** a intervalos regulares T' (medidos pelo relógio de **B'**). Cada vez que o observador **B'** recebe um pulso de luz vindo de **A**, ele também emite um pulso de luz.

O observador **C** recebe os pulsos emitidos por **A** e **B'**.

Esta situação pode ser visualizada no diagrama de Minkowski da Figura 3.1.

3.3 Definição

Por estar em movimento em relação a **A**, o observador **B'** recebe os pulsos emitidos por **A** a intervalos T' , diferente de T . Este efeito, conhecido como efeito Doppler, é bastante familiar. Por exemplo, o som do motor de um avião é mais agudo quando o avião está se aproximando da pessoa que ouve o barulho e mais grave quando o avião está se afastando. A aproximação resulta num aumento da frequência de recepção e, portanto, numa diminuição do período, enquanto o afastamento resulta numa diminuição da frequência de recepção

e, portanto, num aumento do período. Intuitivamente, se o emissor estiver se afastando do receptor (ou vice-versa), cada crista da onda deve percorrer uma distância maior que a anterior, o que resulta num aumento do intervalo de recepção de cristas sucessivas. O mesmo argumento vale para os pulsos considerados aqui: como o observador B' está se afastando de A , cada pulso emitido por A deve percorrer uma distância maior que o anterior para chegar até B' . Portanto, o intervalo de recepção dos pulsos por B' é maior que o intervalo de emissão desses pulsos por A . Será utilizada aqui a expressão **fator k de Bondi**, ou simplesmente **fator k**, para a razão entre o intervalo de recepção T' dos pulsos por B' (medido pelo relógio de B') e o intervalo de emissão T dos pulsos por A (medido pelo relógio de A):

$$k = \frac{\text{intervalo de recepção por } B' \text{ (relógio de } B')}{\text{intervalo de emissão por } A \text{ (relógio de } A)} = \frac{T'}{T}. \quad (3.1)$$

Este é o fator de Bondi que caracteriza o movimento de B' em relação a A . Claramente, os papéis de A e B' poderiam ser trocados, de maneira que o mesmo fator k caracteriza o movimento de A em relação a B' .¹ No caso considerado, $k > 1$, pois os dois observadores estão se afastando um do outro.

3.4 Análise

Pela definição acima, o intervalo de recepção dos pulsos por B' é $T' = kT$. Portanto, o intervalo de emissão dos pulsos de B' também é $T' = kT$. Já que, pelo segundo postulada da relatividade, todos os pulsos de luz se propagam com a mesma velocidade, os pulsos emitidos por A e por B' viajam juntos (em pares) até C e são portanto recebidos com o mesmo intervalo. Este intervalo, medido pelo relógio de C , é igual ao intervalo T de emissão dos pulsos por A , já que C está em repouso em relação a A .

3.5 Resumo

| | | | | |
|--------------------------|---|----------------------------|---|---------------------------|
| A | | B' | | C |
| intervalo de emissão T | → | intervalo de recepção kT | | |
| | | intervalo de emissão kT | → | intervalo de recepção T |

¹Esta afirmação é válida no caso da luz porque a velocidade de propagação dos sinais é a mesma para todos os observadores. No caso de uma onda sonora, seria necessário considerar, não apenas o movimento relativo da fonte e do receptor, mas também os movimentos da fonte e do receptor em relação ao meio de propagação.

3.6 Conclusão

A razão entre o intervalo de recepção dos pulsos por **C** (medido pelo relógio de **C**) e o intervalo de emissão por **B'** (medido pelo relógio de **B'**) é

$$\bar{k} = \frac{\text{intervalo de recepção por } C \text{ (relógio de } C)}{\text{intervalo de emissão por } B' \text{ (relógio de } B')} = \frac{T}{T'} = \frac{T}{kT} = \frac{1}{k}. \quad (3.2)$$

O fator \bar{k} assim definido caracteriza o movimento do observador **C** em relação ao observador **B'** ou, equivalentemente, o movimento do observador **B'** em relação ao observador **C**. Neste caso, $\bar{k} < 1$, pois os dois observadores em questão estão se aproximando um do outro.

3.7 Compacto

| | |
|--|---|
| <i>Movimento relativo do emissor e do receptor</i> | <i>intervalo de recepção</i> <i>intervalo de emissão</i> |
| afastamento | k |
| aproximação | 1/k |

3.8 Comentários

A existência de um fator k diferente de 1 não é peculiar à Relatividade Restrita, é simplesmente o efeito Doppler. Mas a relação explicitada no quadro acima é característica da Relatividade Restrita, pois supõe que a velocidade do sinal luminoso é independente das velocidades do emissor e do receptor.

O fator k é bastante conveniente para caracterizar o movimento relativo de dois observadores inerciais mas, uma vez introduzido este conceito, a velocidade relativa v , comumente utilizada como ponto de partida em apresentações da Relatividade Restrita, pode naturalmente ser deduzida como uma função de k . Isto será feito no próximo capítulo.

Capítulo 4

Relação entre o fator k e a velocidade relativa v

4.1 Introdução

A maioria das apresentações da Relatividade utilizam a velocidade relativa para especificar a relação cinemática entre dois observadores. Embora menos conveniente que o fator de Bondi, esta quantidade é importante e, neste capítulo, fica estabelecida a relação entre as duas grandezas.

4.2 Situação

Um observador B' está em movimento retilíneo uniforme em relação a outro observador A . O observador A carrega um dispositivo capaz de emitir e detectar pulsos de luz, enquanto o observador B' carrega um espelho capaz de refletir os pulsos mandados por A .

Quando B' passa por A , ambos zeram os seus relógios; se denotarmos por O esse evento, teremos então $t_O = t'_O = 0$.

Quando B' passa por A , este manda um primeiro pulso de luz para B' . Já que A e B' estão no mesmo lugar naquele instante, este pulso é refletido essencialmente instantaneamente pelo espelho e o pulso refletido é recebido por A no mesmo instante. Ou seja, pode-se considerar que os eventos de emissão, reflexão e recepção deste primeiro pulso coincidem todos com o evento O .

O observador B' então começa a afastar-se de A . O movimento de afastamento de um dos observadores em relação ao outro é caracterizado pelo fator de Bondi k .

Algum tempo depois, o observador A manda um segundo pulso de luz para B' ; este pulso é refletido pelo espelho e recebido de volta por A . Denotamos por I , R e F , respectivamente, os eventos de emissão (por A), reflexão (por B') e recepção (por A) deste pulso.

A situação descrita acima está representada no diagrama de Minkowski da Figura 4.1. Naturalmente, o primeiro pulso, cuja existência possui duração arbitrariamente curta, não é visível. Além dos elementos introduzidos acima, o gráfico mostra a construção necessária

para extrair as coordenadas (t_R, x_R) do evento R de reflexão do segundo pulso, que desempenham um papel central na análise da próxima seção.

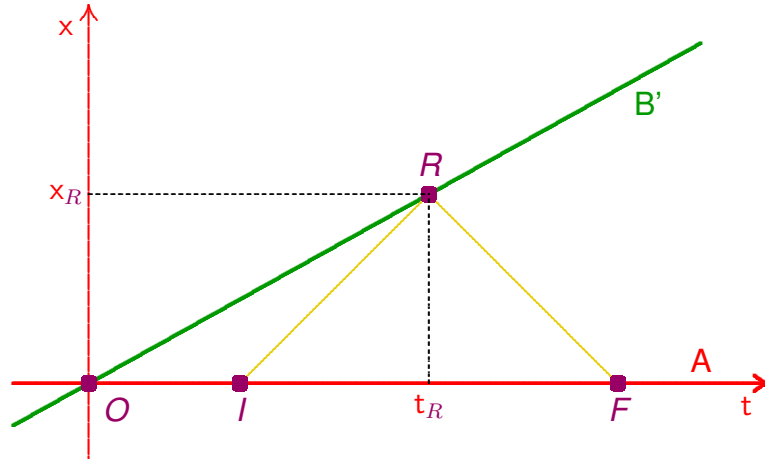


Figura 4.1: Diagrama de Minkowski mostrando a situação considerada para estabelecer a relação entre o fator de Bondi e a velocidade relativa de um par de observadores. Vê-se as linhas de mundo dos dois observadores A e B' e do (segundo) pulso de luz mandado pelo primeiro observador e refletido pelo segundo. A determinação gráfica das coordenadas do evento de reflexão, no referencial de A , está explicitada.

4.3 Análise

Na notação introduzida no começo deste texto, os tempos de emissão dos dois pulsos, medidos pelo relógio de A , são t_O e t_I e o intervalo de emissão dos pulsos é $t_I - t_O$. Os tempos de reflexão desses pulsos, medidos pelo relógio de B' , são t'_O e t'_R . Naturalmente, uma reflexão pode ser considerada como uma recepção seguida de imediata reemissão, portanto, o intervalo de recepção dos pulsos pelo observador B' é $t'_R - t'_O$. Pela definição do fator k , pode-se escrever, então,

$$t'_R - t'_O = k(t_I - t_O), \quad (4.1)$$

ou, já que $t_O = t'_O = 0$,

$$t_I = \frac{t'_R}{k}. \quad (4.2)$$

Na mesma notação, os tempos de recepção, pelo observador A , dos pulsos refletidos, são t_O e t_F , respectivamente, e o intervalo de recepção desses pulsos é $t_F - t_O$. Como já apontado, os tempos de reflexão dos pulsos por B' podem ser interpretados como tempos de emissão dos pulsos refletidos e, portanto, o intervalo de emissão desses pulsos refletidos, medido pelo relógio de B' , é $t'_R - t'_O$. A definição do fator k pode ser aplicada de novo para relacionar o intervalo de recepção, por A , dos pulsos refletidos com o intervalo de emissão,

por B' , desses pulsos. A relação em questão é, claramente,

$$t_F - t_O = k(t'_R - t'_O), \quad (4.3)$$

ou, simplesmente,

$$t_F = k t'_R. \quad (4.4)$$

Tendo registrado o tempo t_I de emissão do segundo pulso e o tempo t_F de recepção do pulso refletido correspondente, o observador A pode atribuir um tempo e uma posição ao evento de reflexão R . Como o segundo pulso se propagou com a velocidade constante c , ele levou o mesmo tempo para ir até o evento R e para voltar. Portanto, ele esteve em R no instante médio entre o instante de emissão e o instante de recepção. Ou seja, o observador A atribui ao evento R o tempo

$$t_R = \frac{t_I + t_F}{2} = \frac{t'_R/k + k t'_R}{2} = \frac{k^2 + 1}{2k} t'_R, \quad (4.5)$$

onde foram usadas as relações (4.2) e (4.4).

A distância entre o evento R e o observador A , ou seja, a coordenada de posição x_R atribuída por A ao evento R , é a metade da distância total percorrida pelo segundo pulso entre a sua emissão e a sua recepção, após reflexão por B' . Já que o pulso se propaga com a velocidade c , isto dá, invocando de novo as relações (4.2) e (4.4):

$$x_R = \frac{c(t_F - t_I)}{2} = \frac{c(k t'_R - t'_R/k)}{2} = \frac{c(k^2 - 1)}{2k} t'_R. \quad (4.6)$$

4.4 Conclusão

Como o observador B' estava presente no evento O e no evento R , para o observador A , o observador B' percorreu a distância x_R no tempo t_R . Portanto, pode-se calcular a velocidade v de B' em relação a A simplesmente por

$$v = \frac{x_R}{t_R}. \quad (4.7)$$

A partir dos resultados (4.5) e (4.6), obtém-se, após algumas simplificações elementares,

$$v = c \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}. \quad (4.8)$$

Esta é a expressão da velocidade relativa de dois observadores cujo movimento de afastamento recíproco é caracterizado pelo fator de Bondi k . Verifica-se que $k = 1$ corresponde a $v = 0$ e que $v < c$ sempre.

Para obter a relação inversa, basta reescrever (4.8) na forma

$$k^2(c - v) = c + v \quad (4.9)$$

para deduzir

$$k = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}. \quad (4.10)$$

4.5 Comentários

Na seção anterior, ficou estabelecida a relação entre o fator de Bondi k e a velocidade relativa v no caso de dois observadores que estão se afastando um do outro.

Como foi demonstrado no capítulo anterior, se os observadores estivessem se aproximando, o fator seria

$$\bar{k} = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}. \quad (4.11)$$

As expressões (4.10) e (4.11) são encontradas na maioria dos livros-textos de Relatividade na discussão do efeito Doppler¹ para a luz (ou para uma onda eletromagnética em geral), para as situações de afastamento e de aproximação do detector em relação à fonte, respectivamente.

Pode ser útil enfatizar que a quantidade v considerada aqui é, na verdade, o módulo, ou valor absoluto, da velocidade relativa dos observadores. Uma apresentação mais convencional consiste em atribuir arbitrariamente um sentido positivo à linha de movimento do segundo observador, em relação ao primeiro, e considerar $v > 0$ se o movimento for nesse sentido e $v < 0$ se for no sentido contrário. Tal atribuição especifica o movimento relativo pelo valor de $v \in]-c, +c[$, para toda a duração do movimento, sem distinguir entre as situações de afastamento e de aproximação dos observadores. Já na abordagem de Bondi utilizada aqui, se o movimento relativo for especificado por $k > 1$ na fase de afastamento, o mesmo movimento deverá ter sido especificado por $\bar{k} = 1/k < 1$ na fase de aproximação.

¹Na forma apresentada aqui, trata-se das expressões para a razão entre os períodos de recepção e de emissão. Se forem consideradas frequências em vez de períodos, as expressões serão invertidas, já que a frequência é o inverso do período.

Capítulo 5

Dilatação do tempo

5.1 Introdução

É frequente ouvir afirmar que Einstein estabeleceu que o tempo é relativo. A afirmação mais precisa é que observadores em movimento relativo atribuirão valores diferentes ao intervalo de tempo entre dois eventos. Por exemplo, se um observador comparar o andamento de um relógio carregado por outro observador em movimento em relação a ele, com o andamento do seu próprio relógio, ele constatará que o relógio em movimento está se atrasando, pois o intervalo entre “tiques” do relógio em movimento será maior que o intervalo entre “tiques” do seu próprio relógio. A razão entre esses intervalos é uma função simples do fator de Bondi - ou da velocidade - que caracteriza o movimento de um observador em relação ao outro.

5.2 Situação

A situação considerada é aquela do item anterior, representada no diagrama de Minkowski da Figura 4.1. Os dois eventos focados são dois “tiques” do relógio carregado pelo observador B' . O primeiro “tique” ocorre no evento O , ou seja, quando os dois observadores se cruzam. O segundo “tique” ocorre quando o segundo pulso de luz é refletido pelo espelho carregado por B' , ou seja, no evento R .

Como no capítulo anterior, supõe-se que os dois observadores acertam seus relógios quando se cruzam, de maneira que tanto o relógio de A quanto o relógio de B' marcam zero quando ocorre o primeiro “tique”: $t_O = t'_O = 0$. O tempo marcado pelo relógio de B' quando ocorre o segundo “tique” considerado é denotado por t'_R e o tempo atribuído pelo observador A a este evento é denotado por t_R . O intervalo entre os “tiques” é, portanto, t'_R pelo relógio de B' e t_R pelo relógio de A . A razão t_R/t'_R entre esses intervalos é a grandeza de interesse. Se o tempo fosse universal, fluindo igualmente para todos os observadores, esta razão seria, evidentemente, igual um.

5.3 Análise

Como o segundo “tique” do relógio carregado pelo observador **B'** coincide com o evento **R**, o tempo marcado pelo relógio do observador **A** quando ele ocorre é o tempo atribuído por **A** ao evento **R**, tempo este que já foi calculado no capítulo anterior, com o resultado [veja a expressão (4.5)]

$$t_R = \frac{t'_R/k + kt'_R}{2}. \quad (5.1)$$

A razão entre os intervalos separando os “tiques”, medidos por cada observador, é portanto

$$\frac{t_R}{t'_R} = \frac{1/k + k}{2} \equiv \gamma, \quad (5.2)$$

onde foi introduzida a notação convencional γ para esta importante quantidade, conhecida como **fator de Lorentz**. Usando a expressão (4.10) obtida anteriormente para o fator k em termos da velocidade relativa v , pode-se obter facilmente a expressão do fator de Lorentz em termos de v :

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} + \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \right) = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad (5.3)$$

ou

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (5.4)$$

Naturalmente, $\gamma = 1$ se os dois observadores estiverem em repouso relativo. Para observadores em movimento relativo, tem-se sempre $\gamma > 1$ e o fator γ cresce infinitamente quando a velocidade relativa dos dois observadores se aproxima da velocidade da luz.

5.4 Resumo

Para resumir numa notação mais geral o resultado obtido, é conveniente adotar a letra grega Δ para indicar um intervalo de variação de alguma quantidade. Por exemplo, a notação $\Delta t'$ indica a variação (aqui, entre os eventos **O** e **R**) do tempo marcado pelo relógio carregado pelo observador **B'** e a expressão Δt refere-se à variação do tempo marcado pelo relógio do observador **A** (entre os mesmos eventos). No desenvolvimento acima, tem-se $\Delta t' = t'_R$ e $\Delta t = t_R$. Portanto, a relação (5.2) toma a forma

$$\Delta t = \gamma \Delta t'. \quad (5.5)$$

A diferença essencial entre os observadores **B'** e **A** é que, para o primeiro, o relógio cujos “tiques” são os eventos considerados está em repouso quando, para o segundo, esse relógio está em movimento com velocidade v . Para enfatizar este ponto essencial, é conveniente utilizar a notação Δt_0 para o intervalo de tempo indicado pelo relógio em repouso e a notação Δt_v para o intervalo correspondente, medido pelo relógio de um observador que

vê o primeiro relógio se movimentando com velocidade v . Na situação analisada acima, tem-se então $\Delta t' = \Delta t_0$ e $\Delta t = \Delta t_v$, de maneira que a relação (5.5) fica

$$\Delta t_v = \gamma \Delta t_0 \text{ com } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > 1. \quad (5.6)$$

A expressão *intervalo de tempo próprio* é frequentemente usada em referência a Δt_0 , o intervalo entre “tiques” de um relógio, medido num referencial no qual esse relógio está em repouso.

5.5 Conclusão

Um observador constata que o deslocamento do ponteiro de um relógio em movimento indica um intervalo de tempo Δt_0 . Comparando com o deslocamento do ponteiro do relógio que ele carrega consigo, ele repara que este não corresponde ao mesmo intervalo de tempo, e sim ao intervalo Δt_v , tal que $\Delta t_v = \gamma \Delta t_0 > \Delta t_0$. Confiando, evidentemente, no seu próprio relógio, ele conclui que *o relógio em movimento está se atrasando*. Este fenômeno é conhecido como *dilatação do tempo*.

Vale enfatizar os seguintes pontos:

- É fácil verificar que a expressão (5.2) é invariante frente à troca $k \leftrightarrow 1/k$ e, portanto, para um dado valor da velocidade relativa, a dilatação do tempo é a mesma nas situações de aproximação e de afastamento dos observadores. Vale a pena ressaltar esta diferença entre o efeito Doppler e a dilatação do tempo: no efeito Doppler, observa-se um aumento do período se a fonte está se afastando e uma diminuição do período se a fonte está se aproximando; já a passagem do tempo é sujeita à dilatação apenas, nunca ocorre compressão do tempo.
- O efeito é recíproco. Para B' , o relógio carregado por A é que está em movimento e, portanto, está se atrasando.
- Do ponto de vista teórico, a dilatação do tempo é uma consequência irrefutável dos postulados da Relatividade.

5.6 Ilustração

A dilatação do tempo é verificada experimentalmente, por exemplo nos tempos de decaimento de partículas instáveis produzidas pelos raios cósmicos ao penetrar na atmosfera terrestre. Pode-se imaginar que essas partículas possuem um “relógio interno” que determina o seu tempo de vida próprio Δt_0 . No referencial da Terra, as partículas se propagam com velocidade v próxima (embora inferior) à da luz. O tempo que elas levam para atravessar a atmosfera é $\Delta t = H/v$, sendo H a altura da atmosfera, medida no referencial da Terra.¹ Verifica-se que $\Delta t > \Delta t_0$, de maneira que, se não ocorresse a dilatação do tempo, as

¹A importância de explicitar o referencial no qual mede-se uma altura, ou um comprimento, é assunto do próximo capítulo.

partículas desapareceriam antes de poder ser detectadas em laboratórios construídos sobre a superfície da Terra. Mas, graças à dilatação do tempo, o tempo de vida das partículas no referencial da Terra é Δt_v , muito maior que Δt_0 , já que o fator de Lorentz γ é muito maior que um. Para uma partícula com velocidade suficientemente próxima da velocidade da luz, Δt_v será maior que Δt e a partícula sobreviverá o tempo suficiente para atravessar toda a atmosfera e ser detectada ao nível do chão.

Capítulo 6

Contração dos comprimentos

6.1 Introdução

Estabelecer a geometria do espaço requer dar sentido à distância entre dois pontos ou, mais concretamente, ao comprimento de um objeto rígido. Se o objeto estiver em repouso, não haverá nenhuma dificuldade. Por exemplo, se um observador estiver sobre uma plataforma, ele poderá determinar o comprimento desta caminhando de uma extremidade até a outra e contando o número de passos. Como a plataforma não se mexe, não há preocupação com a simultaneidade dos eventos utilizados, o observador pode demorar quanto quiser para percorrer o trajeto. Naturalmente, para uma determinação mais precisa, uso seria feito dos princípios fundamentais da física, em especial, da invariância da velocidade da luz. Colocar-se-ia um espelho numa das extremidades da plataforma e, a partir da outra extremidade, mandar-se-ia um pulso de luz para ser refletido pelo espelho. Sendo E o evento de emissão do pulso e D o evento de detecção do pulso refletido, o comprimento da plataforma será dado por $L_0 = c \frac{t_D - t_E}{2}$, onde c é a velocidade da luz e os tempos t_D e t_E são medidos pelo relógio do observador que está parado sobre a plataforma. O comprimento assim determinado é conhecido como **comprimento em repouso**, ou **comprimento próprio** da plataforma, pois é medido por um observador que está em repouso em relação à plataforma.

Quando o objeto cujo comprimento pretende-se medir está em movimento em relação ao observador, é preciso ter cuidado para garantir que os eventos selecionados a cada extremidade do objeto, para calcular a distância entre eles, ocorram **simultaneamente** para o observador em questão.

6.2 Situação

O observador **A** deseja determinar o comprimento L (para ele) de uma plataforma que está em movimento com velocidade v , correspondendo ao fator de Bondi k . Dois observadores **B'** e **C'** estão parados sobre a plataforma, um em cada extremidade. Ambos carregam um espelho. Para eles, o comprimento da plataforma é L' . Como a plataforma está em repouso em relação a esses observadores, este é o comprimento próprio L_0 da plataforma. Tem-se, então, $L' = L_0$. Supõe-se que este comprimento foi previamente medido por **B'**, por exemplo, mandando um pulso de luz até o espelho de **C'** e detectando o pulso refletido, conforme o procedimento descrito na Seção 6.1. Supõe-se ainda que **B'** comunicou o resultado para **A**.

Para determinar o comprimento da plataforma, por ele observado, **A** precisará calcular a distância entre dois eventos ocorrendo simultaneamente (para ele) a cada extremidade da plataforma. Estes eventos serão reflexões de pulsos de luz pelos espelhos.

Supomos que **B'** passa por **A** antes de **C'** e supomos ainda, para simplificar, que quando **C'** passa por **A**, ambos zeram os seus relógios. Pode-se imaginar que **A** manda um pulso para **C'** naquele evento; este pulso (que chamaremos pulso 0) é recebido e refletido instantaneamente por **C'**, sendo o pulso refletido instantaneamente recebido por **A**. Ou seja, os eventos de emissão, reflexão e recepção deste pulso 0 coincidem e denotamos por **O** este evento. Por convenção de notação, t_O representará o tempo atribuído pelo observador **A** ao evento e t'_O representará o tempo atribuído pelo observador **C'** ao mesmo evento. Pelas convenções estipuladas acima, $t_O = t'_O = 0$. Evidentemente, o relógio carregado por **B'** deve também ser zerado de maneira que, para **B'** e **C'**, os seus relógios marcarão sempre o mesmo tempo, já que eles estão em repouso relativo.

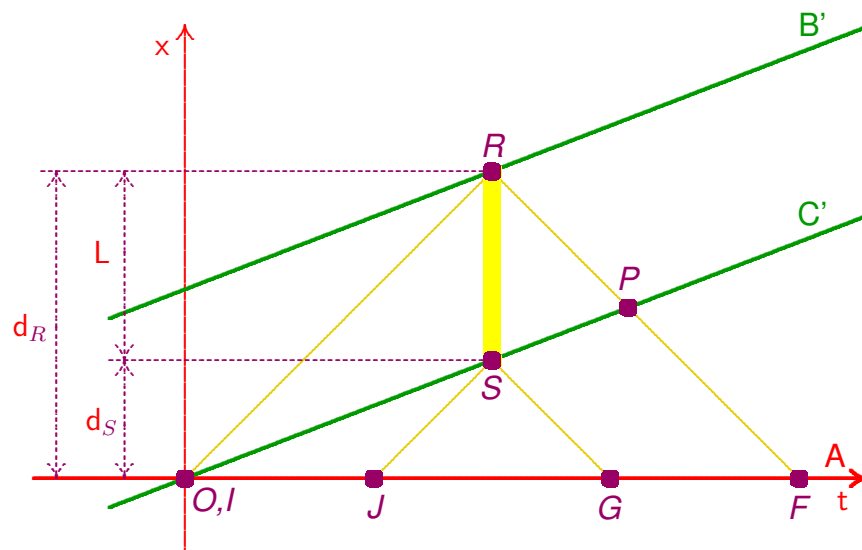


Figura 6.1: Diagrama de Minkowski mostrando a situação considerada para a análise da contração do comprimento de uma plataforma. Os eixos do diagrama referem-se ao referencial do observador **A** para o qual a plataforma está em movimento. Vê-se as linhas de mundo de dois observadores **B'** e **C'** colocados nas extremidades da plataforma. Para **A**, os dois pulsos de luz que ele manda são refletidos simultaneamente pelos espelhos carregados por **B'** e **C'**. A determinação gráfica do comprimento atribuído à plataforma pelo observador **A** está explicitada.

Para determinar o comprimento da plataforma, **A** manda dois pulsos 1 e 2, que são refletidos por **B'** e **C'** respectivamente. Como **B'** está mais afastado de **A** que **C'**, o pulso que irá até **B'** deve ser mandado primeiro (pulso 1); o pulso que será refletido por **C'** é mandado depois (pulso 2). Como veremos, os tempos de emissão desses pulsos deverão ser acertados de maneira que as reflexões ocorram simultaneamente para **A**. Para simplificar a discussão ao máximo, será conveniente supor que a emissão do pulso 1 se dá quando o observador **C'** passa pelo observador **A**. Denotaremos por **I** este evento, onde a letra **I** serve para lembrar que trata-se do evento inicial do pulso. Com essa convenção, o evento **I** coincide, na verdade, com o evento **O** e temos $t_I = t'_I = 0$. O evento de reflexão do primeiro pulso por **B'** será denotado por **R** e o evento de recepção por **A** do pulso refletido correspondente será denotado por **F**, onde a letra **F** lembra que trata-se do evento final da vida desse pulso.

O pulso 2, que será refletido por **C'**, é mandado por **A** algum tempo depois. Em analogia com a sucessão de eventos $I \rightarrow R \rightarrow F$ na vida do pulso 1, introduzimos a sequência de eventos $J \rightarrow S \rightarrow G$ na vida do pulso 2, ou seja, denotamos por **J** o evento de emissão deste pulso e por **G** o evento de recepção por **A** do pulso refletido correspondente. Usamos a letra **S** para indicar o evento de reflexão desse pulso pelo observador **C'**.

O diagrama de Minkowski ilustrando a situação descrita acima está apresentado na Figura 6.1

6.3 Análise

Os eventos de emissão, pelo observador **A**, dos pulsos 0 e 2 são **O** e **J**, respectivamente. Portanto, o intervalo de emissão desses pulsos, medido pelo relógio de **A**, é $t_J - t_O$. Os eventos de recepção desses pulsos pelo observador **C'** são **O** e **S**, respectivamente. Portanto, o intervalo de recepção desses pulsos, medido pelo relógio de **C'**, é $t'_S - t'_O$. Pela definição do fator de Bondi

$$t'_S - t'_O = k(t_J - t_O), \quad (6.1)$$

ou, simplesmente, já que $t_O = t'_O = 0$,

$$t'_S = k t_J. \quad (6.2)$$

O observador **C'** manda o pulso 0 refletido no evento **O** e o pulso 2 refletido no evento **S**. Portanto, o intervalo de emissão desses pulsos refletidos é $t'_S - t'_O$. Os eventos de recepção, por **A**, desses pulsos refletidos são **O** e **G**, respectivamente. O intervalo de recepção desses pulsos refletidos é, então, $t_G - t_O$. Invocando outra vez a definição do fator de Bondi, pode-se escrever

$$t_G - t_O = k(t'_S - t'_O), \quad (6.3)$$

ou ainda, lembrando mais uma vez que $t_O = t'_O = 0$,

$$t_G = k t'_S = k^2 t_J, \quad (6.4)$$

onde foi utilizada a relação (6.2).

Consideremos agora o pulso 1. Após reflexão por B' , ele passa por C' , no caminho de volta para A ; denotamos por P este evento. A detecção, por C' , do pulso que passa por ele pode ser considerada como uma absorção seguida de imediata reemissão. Portanto, pode-se considerar que o observador C' emitiu pulsos nos eventos O (o pulso 0) e P (o pulso 1 detectado no seu caminho de volta para A). O intervalo de emissão desses pulsos é $t'_P - t'_O$. Esses pulsos são recebidos por A nos eventos O e F , respectivamente. O intervalo de recepção, medido pelo relógio do receptor, é então $t_F - t_O$. Aduzindo de novo a definição do fator de Bondi, pode-se escrever

$$t_F - t_O = k(t'_P - t'_O), \quad (6.5)$$

ou, simplesmente,

$$t_F = k t'_P. \quad (6.6)$$

Entre os eventos I e P , o pulso 1 foi de C' até B' e voltou para C' . Do ponto de vista de C' e B' , ele percorreu a distância $2L'$ entre os instantes t'_I e t'_P ; portanto, tem-se

$$2L' = c(t'_P - t'_I) = c t'_P, \quad (6.7)$$

já que $t'_I = 0$. De (6.6) e (6.7), tira-se

$$t_F = \frac{2kL'}{c}. \quad (6.8)$$

Já que a luz leva o mesmo tempo para ir de A até B' e para voltar, o observador A atribui ao evento de reflexão do pulso 1 por B' o tempo

$$t_R = \frac{t_I + t_F}{2} = \frac{kL'}{c}, \quad (6.9)$$

onde foi usada a relação (6.8), lembrando que $t_I = 0$. Pelo mesmo argumento, o observador A atribui ao evento de reflexão por C' do pulso 2 o tempo

$$t_S = \frac{t_J + t_G}{2} = \frac{1+k^2}{2} t_J, \quad (6.10)$$

onde foi usada a relação (6.4).

Para que o procedimento possa ser considerado uma medida, por A , do comprimento da plataforma, o observador A deve mandar o segundo pulso no instante tal que os eventos utilizados na medida, quais sejam, os eventos de reflexão R e S nas duas extremidades da plataforma, sejam simultâneos (para ele, o observador A). Ou ainda, ele precisa escolher o tempo t_J no qual ele emite o segundo pulso de maneira a conseguir $t_S = t_R$, o que, por (6.9) e (6.10), requer

$$t_J = \frac{2kL'}{(1+k^2)c}. \quad (6.11)$$

Por suposição, são de conhecimento do observador A , o fator de Bondi k que caracteriza o movimento da plataforma em relação a ele e o comprimento L' , que foi medido e informado pelos observadores que estão sobre a plataforma. Portanto, o observador A pode realizar a conta (6.11) e mandar o pulso 2 no momento certo.

Denotaremos por d_R e d_S as distâncias, em relação ao observador A , dos lugares de ocorrência dos eventos R e S , respectivamente. Já que a luz se propaga sempre com velocidade c , temos, usando (6.8) e lembrando que, por escolha, $t_I = 0$:

$$2d_R = c(t_F - t_I) = 2kL' . \quad (6.12)$$

Semelhantemente, usando (6.4) e (6.11), tem-se

$$2d_S = c(t_G - t_J) = c(k^2 - 1)t_J = \frac{2k(k^2 - 1)}{k^2 + 1}L' . \quad (6.13)$$

O comprimento atribuído à plataforma pelo observador A será então, obviamente,

$$L = d_R - d_S = \left(1 - \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}\right)kL' = \frac{2k}{k^2 + 1}L' . \quad (6.14)$$

Lembrando a relação, previamente obtida, entre o fator de Doppler k e a velocidade v de afastamento relativo de dois observadores, qual seja [equação (4.10)],

$$k = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} , \quad (6.15)$$

é fácil verificar que

$$\frac{2k}{k^2 + 1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} , \quad (6.16)$$

onde γ é o já conhecido fator de Lorentz.

6.4 Resumo

Inserindo o resultado (6.16) na relação (6.14), tem-se então

$$L = \frac{L'}{\gamma} . \quad (6.17)$$

A diferença essencial entre os observadores B' e A é que, para o primeiro, a plataforma cujo comprimento está sendo medido está em repouso quando, para o segundo, ela está em movimento com velocidade v . Para enfatizar este ponto essencial, é conveniente utilizar a notação L_0 (já introduzida acima) para o comprimento da plataforma em repouso e a notação L_v para o comprimento correspondente, medido por um observador que vê a plataforma se movimentando com velocidade v . Na situação analisada acima, tem-se então $L' = L_0$ e $L = L_v$, de maneira que a relação (6.17) fica

$$L_v = \frac{L_0}{\gamma} \quad \text{com} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > 1 . \quad (6.18)$$

Como já mencionado, a expressão **comprimento próprio** é frequentemente usada em referência a L_0 , o comprimento da plataforma, ou de qualquer outro objeto, medido no referencial no qual o objeto em questão está em repouso.

6.5 Conclusão

Generalizando este resultado, pode-se afirmar que *para quem observa um objeto em movimento, este objeto parece contraído na direção do seu movimento*. Este fenômeno é conhecido como *contração dos comprimentos* ou *contração de Lorentz*, em homenagem ao físico que o considerou primeiro, embora em base de argumentos bastante diferentes daqueles pertinentes na teoria da Relatividade Restrita de Einstein.

Vale enfatizar os seguintes pontos:

- Para este efeito, não importa se o objeto em movimento está se afastando ou se aproximando, já que o fator γ é o mesmo nessas duas situações, para um dado valor da velocidade relativa v .
- O efeito é recíproco: um objeto que estivesse em repouso em relação ao observador **A** pareceria contraído, pelo mesmo fator γ , aos observadores **B'** e **C'**.
- Trata-se de um efeito cinemático real, e não de uma ilusão associada à observação do objeto com luz.

6.6 Ilustração

A propagação até a superfície da Terra e a detecção das partículas instáveis produzidas na entrada dos raios cósmicos na atmosfera, que foram mencionadas no fim do capítulo anterior como ilustração da dilatação do tempo, podem ser analisadas também invocando a contração dos comprimentos. Para tanto, basta adotar o ponto de vista de um observador que acompanha uma partícula que se propaga, com velocidade v , das regiões superiores da atmosfera até o nível do chão. Por consistência com as convenções adotadas na discussão do capítulo anterior, denotar-se-á por **B'** este observador e por **A** um observador em repouso sobre a Terra. Por causa da contração dos comprimentos, o observador que acompanha a partícula vê o chão (e, portanto, o detector), inicialmente a uma distância $H' = H_v = H_0/\gamma$, sendo $H_0 \equiv H$ a altura da atmosfera medida pelo observador terrestre **A** e γ o fator de Lorentz associado à velocidade v . Como o chão se aproxima com velocidade v , o detector colocado num laboratório terrestre leva o intervalo de tempo $\Delta t' = H'/v = H_v/v = H_0/(\gamma v)$ para alcançar a partícula. Se a velocidade v for suficientemente próxima da velocidade da luz, o fator de Lorentz γ será muito grande e o intervalo $\Delta t'$ será menor que o tempo de vida próprio Δt_0 da partícula. Portanto, o detector chegará antes da partícula decair e esta poderá ser detectada.

Capítulo 7

Combinação das velocidades

7.1 Introdução

Conforme a nossa compreensão corriqueira da velocidade, a lei de combinação de velocidades associadas a movimentos na mesma direção é a simples adição. Por exemplo, quem caminha a 5 km/h sobre uma esteira que rola a 3 km/h se desloca à velocidade de 8 km/h em relação ao saguão do aeroporto. É fácil perceber que esta lei deve perder a sua validade quando as velocidades são frações apreciáveis da velocidade da luz, pois ela poderia levar a uma velocidade resultante maior que a velocidade da luz, o que não é permitido pela Relatividade Restrita.

Neste capítulo, deduz-se a lei relativística de combinação de velocidades paralelas. A lei de combinação dos fatores de Bondi, que segue quase trivialmente da definição, é obtida primeiro. Em posse desta lei e da relação entre fator de Bondi e velocidade, já estabelecida no Capítulo 4, chega-se facilmente ao resultado desejado.

7.2 Situação

Consideramos 3 observadores **A**, **B'** e **C''**. O observador **B'** está se afastando do observador **A** com velocidade v em relação a **A**. O observador **C''** está se afastando de **B'** com velocidade v' em relação a **B'**. Estes movimentos se dão na mesma direção e no mesmo sentido.

A pergunta é: qual é a velocidade do observador **C''** em relação ao observador **A**?

Para permitir a análise baseada no uso do fator de Bondi, supomos que o observador **A** emite pulsos de luz separados por intervalos de tempo T (medidos pelo relógio de **A**). Esses pulsos são detectados por **B'** a intervalos T' (medidos pelo relógio de **B'**). Cada vez que o observador **B'** detecta um pulso vindo de **A**, ele também emite um pulso de luz. Os pulsos emitidos por **A** e **B'** se propagam juntos rumo ao observador **C''**, que os detecta a intervalos T'' (medidos pelo relógio de **C''**).

A situação descrita acima pode ser visualizada no diagrama de Minkowski da Figura 7.1.

7.3 Análise

Seja k o fator de Bondi associado à velocidade v e k' o fator associado à velocidade v' .

Os pulsos emitidos por **A** a intervalos T são recebidos por **B'** a intervalos T' . Pela definição do fator de Bondi:

$$T' = kT. \quad (7.1)$$

O intervalo de emissão dos pulsos de **B'** também é T' . Esses pulsos são recebidos por **C''** a intervalos T'' . Invocando de novo a definição do fator de Bondi, tem-se

$$T'' = k'T'. \quad (7.2)$$

Como os pulsos emitidos por **A** acompanham os pulsos emitidos por **B'**, eles também são recebidos por **C''** a intervalos T'' . Inserindo na relação (7.2) a expressão (7.1) do intervalo medido por **B'**, obtém-se a seguinte relação entre os intervalos medidos por **A** e por **C''**:

$$T'' = k'kT. \quad (7.3)$$

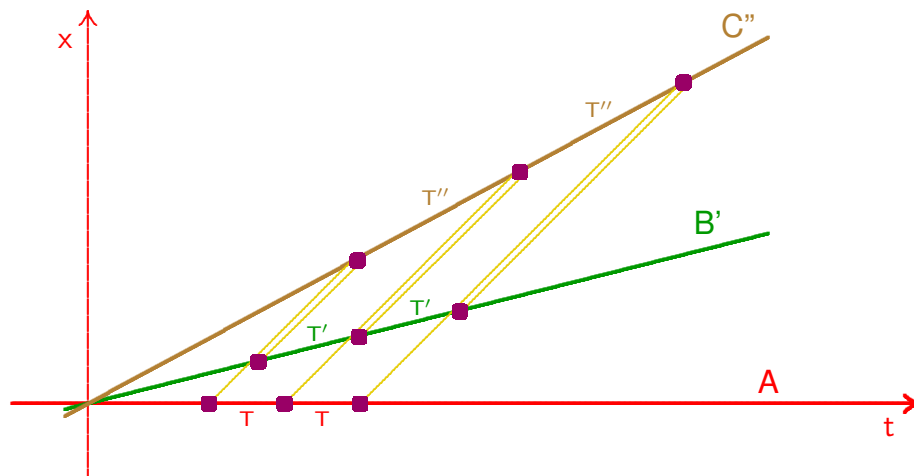


Figura 7.1: Diagrama de Minkowski mostrando a situação considerada para a análise da combinação dos fatores de Bondi relativos a movimentos na mesma direção. Os eixos do diagrama referem-se ao referencial do observador **A**. Vê-se as linhas de mundo dos observadores **A**, **B'** e **C''**, e dos pulsos de luz emitidos a intervalos regulares pelos observadores **A** e **B'**. Os intervalos de emissão e/ou recepção dos pulsos, medidos pelo observador envolvido, estão indicados.

Seja K o fator de Bondi associado ao movimento de **C''** em relação a **A**. Pela definição desta quantidade, pode-se escrever a relação

$$T'' = KT. \quad (7.4)$$

Comparando as duas expressões (7.3) e (7.4) de T'' , conclui-se que

$$K = k'k. \quad (7.5)$$

Ou seja: **a lei de combinação dos fatores k de Bondi é a simples multiplicação.**

7.4 Conclusão

Seja V a velocidade do observador C'' em relação ao observador A . Utilizando a relação (4.8), obtém-se a expressão da velocidade V em termos do fator de Bondi K :

$$V = c \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1}. \quad (7.6)$$

Substituindo nisto a expressão (7.5) de K em termos de k' e k e então as expressões destes em termos de v' e v , dadas pela fórmula (4.10), tem-se

$$V = c \frac{k'^2 k^2 - 1}{k'^2 k^2 + 1} = c \frac{\frac{c+v'}{c-v'} \times \frac{c+v}{c-v} - 1}{\frac{c+v'}{c-v'} \times \frac{c+v}{c-v} + 1} = c \frac{v'c + vc}{c^2 + v'v}, \quad (7.7)$$

ou finalmente

$$V = \frac{v' + v}{1 + \frac{v'v}{c^2}}, \quad (7.8)$$

que vem a ser a *lei de composição relativística das velocidades colineares*.

7.5 Comentários

Nota-se que esta fórmula possui as seguintes propriedades:

- $V = c$ se $v = c$ ou $v' = c$, o que corresponde à invariância da velocidade da luz: se um corpo ou sinal anda com a velocidade da luz para um observador, ele anda com a velocidade da luz para todos os observadores.¹
- V nunca ultrapassa c se v e v' não ultrapassam c : se um corpo ou sinal anda com uma velocidade inferior à da luz para um observador, ele anda com uma velocidade inferior à da luz para todos os observadores.
- Se ambas velocidades v e v' forem muito menores que a velocidade da luz c , o segundo termo no denominador da expressão (7.8) será muito menor que um e a regra de combinação relativística reduzir-se-á, em muito boa aproximação, à familiar lei de combinação aditiva, $V \simeq v' + v$.

¹Como v e v' são velocidades relativas de dois observadores, elas não podem ser colocadas exatamente iguais a c , porém, pode-se considerar velocidades arbitrariamente próximas de c .

Capítulo 8

Paradoxo dos gêmeos

8.1 Introdução

No Capítulo 5, foi visto que um relógio em movimento uniforme está se atrasando em comparação com um relógio carregado pelo observador inercial que testemunha o movimento. Pode-se aplicar este resultado ao envelhecimento de uma pessoa, considerado como governado por um relógio biológico interno. Se imaginarmos dois gêmeos que nascem sobre a Terra mas, um dia, separam-se porque um deles resolve empreender uma longa viagem até outra parte do universo, concluímos que o gêmeo que fica sobre a Terra acha que o seu irmão está envelhecendo mais devagar que ele. Porém, o efeito é recíproco, para o viajante, é o irmão que ficou em casa que está se mantendo mais jovem. Enquanto os irmãos estiverem distantes, ambos estão com a razão sem que haja contradição, já que não há como eles compararem objetivamente os seus estados físicos e mentais.

Mas imaginemos que, após alguns anos, o gêmeo viajante resolve retornar para a casa. No reencontro, a comparação será possível e, se um dos irmãos for realmente mais jovem que o outro, ambos terão que aceitar esta situação. Este capítulo analisa esta questão intrigante.

8.2 Situação

Consideramos três observadores A , B' e C'' . O observador B' está em movimento com velocidade v em relação ao observador A . O observador C'' também está em movimento com velocidade v em relação ao observador A , na mesma direção mas **em sentido oposto**.

Inicialmente, B' e C'' estão se aproximando de A ; B' já está perto de A mas C'' ainda está longe. Quando B' passa por A , ambos zeram os seus relógios. Se denotarmos por O este evento, temos então $t_O = t'_O = 0$. Neste evento, o observador B' manda um primeiro pulso de luz para A , que o recebe essencialmente instantaneamente, já que A e B' estão no mesmo lugar.

O observador B' passa então a afastar-se de A e aproximar-se de C'' . Denotamos por P o evento de encontro dos observadores B' e C'' . Neste evento, o observador C'' ajusta o seu relógio de acordo com o relógio de B' , de maneira que $t''_P = t'_P$. Ao cruzarem um pelo

outro, tanto B' quanto C'' , mandam pulsos de luz para A . Estes pulsos viajam juntos e são recebidos por A no mesmo evento, que denotamos por R .

Após o seu encontro com B' , o observador C'' continua a se aproximar de A . Quando C'' encontra A , ele manda um segundo pulso de luz para A , que é recebido essencialmente instantaneamente. Denotamos por Q o evento de encontro de C'' com A .

A sequência de eventos e movimentos descrita acima pode ser visualizada no diagrama de Minkowski da Figura 8.1.

Quando os observadores C'' e A estão no mesmo lugar, eles podem comparar os seus relógios. A pergunta é: será que os relógios de A e C'' marcam a mesma hora, ou ainda, será que $t''_Q = t_Q$? Note que, já que B' ajustou seu relógio pelo de A e C'' ajustou seu relógio pelo de B' , o “senso comum” responderia **sim** a essa pergunta.

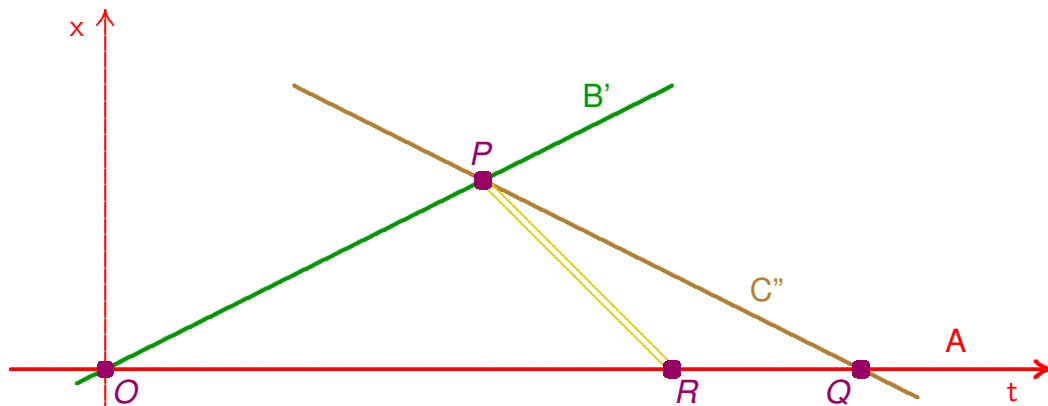


Figura 8.1: Diagrama de Minkowski mostrando a situação considerada na análise do paradoxo dos gêmeos. Os eixos do diagrama referem-se ao referencial do observador A . Vê-se as linhas de mundo dos observadores A , B' e C'' , e dos pulsos de luz emitidos pelos observadores B' e C'' quando cruzam um com o outro.

8.3 Análise

Seja t'_P o tempo indicado pelo relógio de B' no evento P de encontro com C'' . Como C'' então ajusta seu relógio com o de B' , o relógio de C'' marca $t''_P = t'_P$ naquele evento.

Para o observador B' , o tempo decorrido entre o seu encontro com A e o seu encontro com C'' é $t'_P - t'_O = t'_P$, já que o relógio de B' foi ajustado de maneira que $t'_O = 0$. Como o observador C'' aproxima-se de A com a mesma velocidade v com a qual B' se afastou de A , ele leva o mesmo tempo (medido por ele a partir do encontro com B') para chegar até A , ou seja:

$$t''_Q - t''_P = t'_P. \tag{8.1}$$

Assim, no evento Q de encontro com o observador A , o relógio de C'' marca o tempo

$$t''_Q = t''_P + t'_P = 2t'_P, \tag{8.2}$$

onde foi lembrado que C'' ajustou o seu relógio de maneira que $t''_P = t'_P$.

O intervalo (medido por B') na emissão dos dois pulsos por B' , é $t'_P - t'_O = t'_P$. Seja k o fator de Bondi relacionando A e B' . Pela definição deste fator, o intervalo na recepção por A é

$$t_R - t_O = k(t'_P - t'_O) . \quad (8.3)$$

Lembrando que $t_O = t'_O = 0$, deduz-se que, quando ele recebe o segundo pulso de B' , o relógio do observador A marca o tempo

$$t_R = k t'_P . \quad (8.4)$$

Como o primeiro pulso emitido por C'' acompanhou o segundo pulso emitido por B' , este é também o tempo marcado pelo relógio de A quando ele recebe o primeiro pulso de C'' . Já que o observador C'' está se aproximando de A com a mesma velocidade com a qual o observador B' se afastou de A , o fator de Bondi relacionando A e C'' é $1/k$ (veja o Capítulo 3). O intervalo na emissão dos dois pulsos por C'' é $t''_Q - t''_P$, portanto o intervalo na recepção desses pulsos por A é

$$t_Q - t_R = \frac{1}{k}(t''_Q - t''_P) . \quad (8.5)$$

Assim, quando A recebe o segundo pulso de C'' , o seu relógio marca o tempo

$$t_Q = t_R + \frac{1}{k}(t''_Q - t''_P) = k t'_P + \frac{1}{k} t'_P , \quad (8.6)$$

onde foram usadas as relações (8.4) e (8.1).

Em suma, os tempos marcados pelos relógios dos observadores A e C'' no evento de encontro entre eles são dados pelas expressões (8.6) e (8.2).

8.4 Conclusão

Comparando as expressões (8.6) e (8.2), pode-se ver que os tempos t_Q e t''_Q marcados pelos relógios de A e C'' no instante do encontro entre estes dois observadores não são iguais. A razão entre eles é

$$\frac{t_Q}{t''_Q} = \frac{k + \frac{1}{k}}{2} , \quad (8.7)$$

Usando a expressão (4.10) do fator k em termos da velocidade relativa v , obtém-se (veja o cálculo feito na discussão da dilatação do tempo, no Capítulo 5):

$$t_Q = \gamma t''_Q \text{ com } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > 1 . \quad (8.8)$$

Este resultado é formalmente idêntico àquele obtido na discussão da dilatação do tempo e de fato pode ser interpretado como uma manifestação desta dilatação.

Contudo, a situação aqui é significativamente diferente daquela considerada no Capítulo 5. **O efeito aqui não é recíproco.** Como A e C'' estão comparando seus relógios **no mesmo evento** (o encontro entre eles), eles tem que concordar quanto à questão de saber se um está adiantado em relação ao outro.

8.5 Ilustração

Pode-se invocar esta conclusão para responder à pergunta levantada na introdução deste capítulo.

O observador **A** mora sobre o planeta Terra e é pai dos dois filhos gêmeos, **João** e **Pedro**. O observador **B'**, um extraterrestre viajando na sua nave espacial, cruza com **A** e abduz **João**, ao passo que **Pedro** fica com **A** sobre a Terra. Após alguns anos de viagem, a nave de **B'** cruza com outra nave vindo no sentido oposto, com a mesma velocidade (em relação à Terra). No comando desta nave está o observador **C''**, outro extraterrestre. Com saudade do seu lar, **João** transfere-se para a nave de **C''** e, após mais alguns anos de viagem, ele está de volta à Terra e reencontra o seu pai **A** e o seu irmão **Pedro**.

Quando **A** compara seus gêmeos reunidos, ele repara que **João, que viajou, está agora mais jovem que Pedro, que ficou em casa!** Note que todos tem que concordar quanto a isto. **A situação não é simétrica**, pois **João** pulou de um referencial inercial para outro, enquanto **Pedro** permaneceu sempre no mesmo referencial inercial. Ao transferir-se da Terra para a primeira nave, da primeira nave para a segunda, e da segunda nave para a Terra, **João** necessariamente **sofreu acelerações**. Já **Pedro** não sofreu aceleração (na medida em que pode-se considerar a Terra como constituindo um referencial inercial¹).

O drama imaginado acima fica, por enquanto, à alçada da ficção científica apenas. Contudo, o efeito físico envolvido é verificado em experimentos de alta precisão que comparam relógios carregados por aviões com relógios em repouso sobre a Terra.

¹Esta suposição obviamente despreza o movimento orbital da Terra em torno do Sol.

Apêndice A

Exemplos

A.1 Fator de Bondi - exemplo

O diagrama da Figura A.1 ilustra a situação do ponto de vista do observador A.

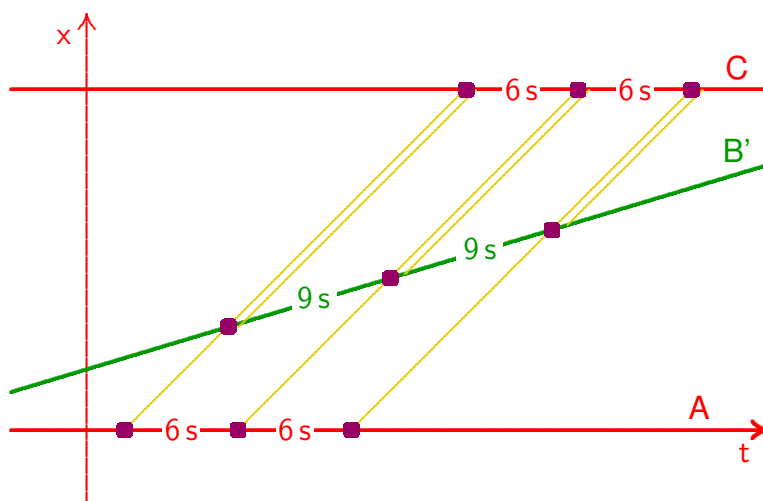


Figura A.1: Diagrama de Minkowski mostrando a situação considerada para ilustrar a discussão do fator de Bondi. Os observadores A e C estão distantes mas em repouso um em relação ao outro. O observador B' está se afastando de A e se aproximando de C. Os intervalos de tempo medidos por cada observador entre os eventos de emissão e detecção dos pulsos de luz estão indicados.

Os pulsos de luz emitidos por A a intervalos de 6s são recebidos pelo observador B', que está **se afastando** de A, a intervalos de 9s. Portanto, o **fator de Bondi** que caracteriza a relação entre A e B', vale

$$k = \frac{9s}{6s} = \frac{3}{2}. \quad (\text{A.1})$$

Cada vez que B' recebe um pulso de luz vindo de A, ele também emite um pulso de luz. Os pulsos de luz emitidos por A e B' viajam juntos até C, que os recebe simultaneamente. O observador C está em repouso em relação a A e o observador B' está se aproximando de C com a mesma velocidade (em valor absoluto) com a qual ele está se afastando de A.

Como **C** está em repouso em relação a **A**, ele recebe os pulsos de **A** a intervalos iguais aos intervalos de emissão, de **6 s**. Portanto, **C** também recebe os pulsos emitidos por **B'** a intervalos de **6 s**. Conseqüentemente, para esses pulsos, a razão entre os intervalos de recepção e de emissão é

$$\frac{6\text{ s}}{9\text{ s}} = \frac{2}{3} = \frac{1}{k}. \tag{A.2}$$

Ou seja: *o fator de Bondi relativo a dois observadores que estão se aproximando um do outro com uma certa velocidade relativa é o inverso daquele associado a dois observadores que estão se afastando com a mesma velocidade relativa (em valor absoluto).*

A.2 Cálculo da velocidade relativa a partir do fator de Bondi - exemplo

O diagrama apresentado na Figura A.2 ilustra a situação do ponto de vista do observador **A**. Seja $k = 3/2$ o fator de Bondi relacionando os observadores **A** e **B'**. Quando os dois observadores se cruzam, ambos zeram os seus relógios e trocam pulsos de luz.

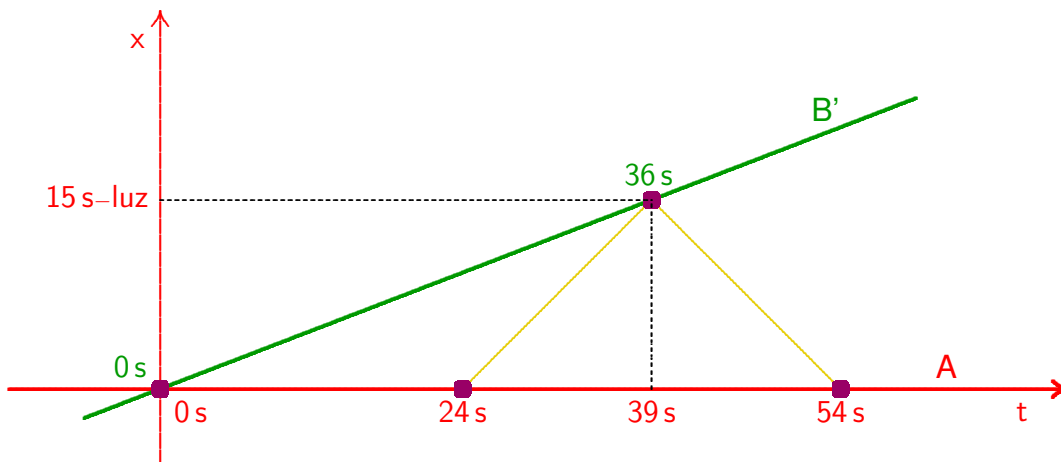


Figura A.2: Diagrama de Minkowski mostrando a situação considerada para estabelecer a relação entre o fator de Bondi e a velocidade relativa de um par de observadores. Vê-se as linhas de mundo dos dois observadores **A** e **B'** e do (segundo) pulso de luz mandado pelo primeiro observador e refletido pelo segundo. A determinação gráfica das coordenadas do evento de reflexão, no referencial de **A**, está explicitada. Os valores indicados correspondem ao caso $k = 3/2$.

Alguns instantes mais tarde, **B'** recebe um segundo pulso de luz vindo de **A**; supomos que o relógio de **B'** marca **36 s** neste evento. O intervalo de recepção dos dois pulsos por **B'** é, então, de **36 s**. Portanto, o intervalo de emissão dos pulsos por **A** foi de

$$\frac{36\text{ s}}{k} = 36\text{ s} \div \frac{3}{2} = 24\text{ s}. \tag{A.3}$$

Já que o primeiro pulso foi mandado por **A** quando seu relógio marcava 0 s , o segundo pulso foi emitido quando o relógio de **A** marcava 24 s .

O observador **B'** manda o pulso de volta para **A**. O intervalo de emissão entre os dois pulsos mandados para **A** por **B'** é de 36 s . O intervalo de recepção desses pulsos por **A** é, portanto,

$$36\text{ s} \times k = 36\text{ s} \times \frac{3}{2} = 54\text{ s} . \quad (\text{A.4})$$

Já que o primeiro pulso foi recebido por **A** no instante 0 s , o relógio de **A** marca 54 s quando ele recebe o pulso refletido, que é o segundo pulso vindo de **B'**.

Para **A**, o evento de reflexão do segundo pulso aconteceu no instante médio entre o instante de emissão e o instante de recepção, ou seja quando o relógio de **A** marcava

$$\frac{24\text{ s} + 54\text{ s}}{2} = 39\text{ s} . \quad (\text{A.5})$$

Conseqüentemente, para **A**, o segundo pulso de luz que ele mandou levou

$$39\text{ s} - 24\text{ s} = 15\text{ s} \quad (\text{A.6})$$

para chegar até o evento de reflexão por **B'**. Logo, este evento aconteceu a uma distância de 15 s-luz . Como **B'** estava presente ao evento de reflexão (ele o provocou!), **A** pode concluir desta análise que **B'** percorreu 15 s-luz em 39 s . A velocidade de **B'** em relação a **A** é então

$$v = \frac{15\text{ s-luz}}{39\text{ s}} = \frac{5}{13} c . \quad (\text{A.7})$$

Verifique que a relação entre k e v , neste exemplo, corresponde à fórmula geral [veja a relação (4.10)]

$$k = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} , \quad (\text{A.8})$$

ou seja, verifique que

$$\sqrt{\frac{1 + 5/13}{1 - 5/13}} = \frac{3}{2} . \quad (\text{A.9})$$

A.3 Dilatação do tempo - exemplo

Pode-se considerar a situação apresentada na seção A.2 e visualizada na Figura A.2, aproveitando boa parte da análise associada. O fator de Bondi relacionando os observadores **A** e **B'** é $k = 3/2$.

Quando os dois observadores se cruzam, ambos zeram os seus relógios, portanto, nesse evento, o relógio de **A** marca o tempo 0 s e o relógio de **B'** também marca 0 s .

Porém, conforme o argumento desenvolvido na seção A.2, quando ocorre a reflexão pelo espelho carregado por **B'** do segundo pulso mandado por **A**, o relógio de **B'** marca 36 s mas o relógio de **A** já marca 39 s . Portanto, para **A**, **o relógio em movimento** carregado por

B' está se atrasando. A razão entre os intervalos de tempo medidos pelo relógio parado e pelo relógio em movimento, conhecida como **fator γ de Lorentz** é

$$\gamma = \frac{39\text{s}}{36\text{s}} = \frac{13}{12}. \quad (\text{A.10})$$

Como demonstrado na seção anterior, neste exemplo, a velocidade do observador **B'** em relação ao observador **A** é $v = 5/13 \times c$. A relação entre o fator de Lorentz γ e a velocidade relativa v , deduzida no Capítulo 5, é

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (\text{A.11})$$

Verifique que esta relação é satisfeita no presente exemplo, ou seja, verifique que

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (5/13)^2}} = \frac{13}{12}. \quad (\text{A.12})$$

A.4 Contração dos comprimentos - exemplo

Com explicado no Capítulo 6, considera-se uma plataforma que possui um comprimento próprio (em repouso) dado e pergunta-se qual o comprimento atribuído a esta mesma plataforma por um observador para o qual ela está se deslocando com uma certa velocidade.

Neste exemplo numérico, supõe-se que o comprimento próprio da plataforma é¹

$$L_0 = 26\text{s-luz} \quad (\text{A.13})$$

e que a plataforma se desloca com velocidade

$$v = \frac{5}{13}c \quad (\text{A.14})$$

que, como calculado nas Seções A.2 e A.3, corresponde ao fator de Bondi

$$k = \frac{3}{2} \quad (\text{A.15})$$

e ao fator de Lorentz

$$\gamma = \frac{13}{12}. \quad (\text{A.16})$$

Denotamos por **A** o observador que realiza a medida do comprimento da plataforma em movimento. O procedimento utilizado por **A** consiste em mandar pulsos de luz que devem ser refletidos simultaneamente (do ponto de vista de **A**) por espelhos carregados por observadores **B'** e **C'** que estão cada um numa extremidade da plataforma e em repouso em relação a esta.

¹É uma plataforma de comprimento bastante respeitável, cerca de 20 vezes a distância da Terra à Lua!

O diagrama da Figura A.3 ilustra a situação do ponto de vista do observador A. O observador B' passa pelo observador A primeiro; algum tempo depois, o observador C' passa pelo observador A e supõe-se que, quando os dois observadores A e C' se cruzam, ambos zeram os seu relógios. Portanto, neste evento, o relógio de A marca 0s e o relógio de C' também marca 0s (evento O).

Para desenvolver o argumento baseado no uso do fator de Bondi, é conveniente supor que quando C' passa por A, este manda um primeiro pulso de luz que é refletido instantaneamente pelo espelho de C' e volta imediatamente para A. Naquele mesmo evento, o observador A também manda um pulso para o observador B' (evento I, que coincide com o evento O).

Algum tempo depois, o observador A manda um outro pulso de luz que deve ser refletido pelo espelho de C'. Como discutido no Capítulo 6, o observador A deve escolher o tempo de emissão desse pulso de maneira que, do ponto de vista de A, a reflexão pelo espelho de C' aconteça simultaneamente com a reflexão do pulso que foi mandado rumo ao espelho de B'. Sabendo os valores do comprimento próprio da plataforma e do fator de Bondi, o observador A pode calcular este tempo [veja a equação (6.11), lembrando que $L' = L_0$] como

$$\frac{2kL_0}{(1+k^2)c} = \frac{2 \times \frac{3}{2}}{1 + (\frac{3}{2})^2} \times \frac{26\text{s-luz}}{1\text{s-luz/s}} = 24\text{s} . \tag{A.17}$$

Ou seja, A deve mandar o segundo pulso para C' quando o seu relógio marca 24s (evento J).

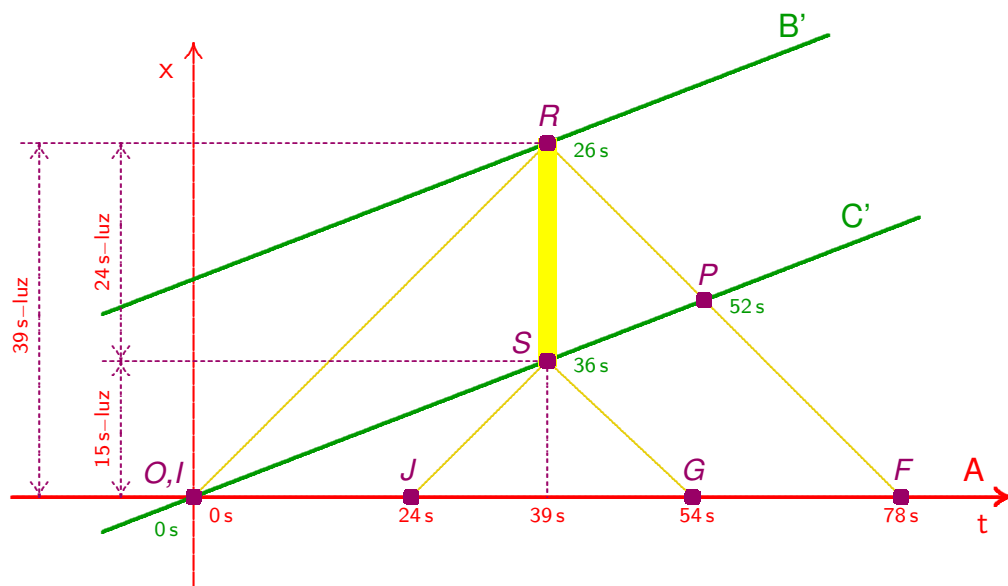


Figura A.3: Diagrama de Minkowski mostrando a situação considerada para a análise da contração do comprimento de uma plataforma. Os eixos do diagrama referem-se ao referencial do observador A para o qual a plataforma está em movimento. Vê-se as linhas de mundo de dois observadores B' e C' colocados nas extremidades da plataforma. Para A, os dois pulsos de luz que ele manda são refletidos simultaneamente pelos espelhos carregados por B' e C'. A determinação gráfica do comprimento atribuído à plataforma pelo observador A está explicitada.

Já que o intervalo de emissão dos dois pulsos mandados por **A** para **C'** foi de **24 s**, o intervalo de recepção por **C'** é de

$$\frac{3}{2} \times 24 \text{ s} = 36 \text{ s} . \quad (\text{A.18})$$

Portanto, quando **C'** recebe o segundo pulso vindo de **A**, o seu relógio marca **36 s** (evento **S**). Sendo o intervalo de reflexão dos dois pulsos pelo espelho de **C'** de **36 s**, o intervalo de recepção, por **A**, dos pulsos refletidos deve ser

$$\frac{3}{2} \times 36 \text{ s} = 54 \text{ s} . \quad (\text{A.19})$$

O tempo indicado pelo relógio de **A** quando ele recebe o segundo pulso refletido por **C'** é portanto **54 s** (evento **G**).

Pela constância da velocidade da luz, o tempo atribuído por **A** ao evento de reflexão, por **C'**, do segundo pulso (evento **S**) deve ser a média entre o tempo de emissão e o tempo de recepção do pulso refletido, ou seja,

$$\frac{24 \text{ s} + 54 \text{ s}}{2} = 39 \text{ s} . \quad (\text{A.20})$$

Como, durante este intervalo de tempo, o observador **C'** afastou-se de **A** com velocidade $\frac{5}{13}c$, deduz-se facilmente que o evento de reflexão **S** ocorreu a uma distância de **A** dada por:

$$\frac{5}{13} \times \frac{1 \text{ s-luz}}{s} \times 39 \text{ s} = 15 \text{ s-luz} . \quad (\text{A.21})$$

Consideramos agora o pulso de luz que foi mandado por **A** rumo ao espelho de **B'**. Ele foi mandado no evento em que **C'** cruzou por **A** e zerou o seu relógio, portanto a **0 s**, pelos relógios de **B'** e **C'**. Para estes observadores, ele levou

$$\frac{L_0}{c} = \frac{26 \text{ s-luz}}{\frac{1 \text{ s-luz}}{s}} = 26 \text{ s} \quad (\text{A.22})$$

para chegar até **B'**; portanto, quando o seu espelho reflete este pulso, o relógio de **B'** marca **26 s** (evento **R**). O pulso refletido leva o mesmo tempo para voltar até **C'**, portanto, quando ele passa por **C'**, o relógio de **C'** marca **52 s** (evento **P**). Se considerarmos, junto com este pulso refletido, aquele que foi refletido instantaneamente quando **C'** passou por **A**, vemos que o intervalo entre as passagens por **C'** desses dois pulsos foi de **52 s**, pelo relógio de **C'**. Portanto, o intervalo de recepção por **A** foi de

$$\frac{3}{2} \times 52 \text{ s} = 78 \text{ s} \quad (\text{A.23})$$

e, quando o observador **A** recebe o pulso refletido por **B'**, o seu relógio marca **78 s** (evento **F**). Para o observador **A**, o evento de reflexão do pulso por **B'** ocorreu no instante médio entre o instante de emissão e o instante de recepção do pulso refletido, portanto em

$$\frac{0 \text{ s} + 78 \text{ s}}{2} = 39 \text{ s} . \quad (\text{A.24})$$

Verifica-se então que os eventos de reflexão nas duas extremidades da plataforma (eventos R e S) ocorreram simultaneamente para o observador A , como tinha que ser para que a operação toda corresponda de fato a uma medida, por A , do comprimento da plataforma. Para completar o cálculo deste comprimento, basta determinar ainda a distância entre o observador A e a extremidade mais longínqua da plataforma no instante da medida. Como o pulso de luz refletido por B' levou 39 s para chegar até B' , esta distância é obviamente

$$\frac{1\text{ s-luz}}{s} \times 39\text{ s} = 39\text{ s-luz} . \quad (\text{A.25})$$

O comprimento medido por A é a diferença entre as distâncias das duas extremidades da plataforma no instante da medida:

$$39\text{ s-luz} - 15\text{ s-luz} = 24\text{ s-luz} . \quad (\text{A.26})$$

É imediato conferir que este resultado está de acordo com a teoria da contração dos comprimentos [veja a relação (6.18)]:

$$\frac{L_0}{\gamma} = \frac{26\text{ s-luz}}{\frac{13}{12}} = 24\text{ s-luz} . \quad (\text{A.27})$$

Vale enfatizar que os eventos R e S de reflexão dos pulsos nas duas extremidades da plataforma, embora sejam simultâneos para o observador A – ambos ocorrem quando o relógio deste observador marca 39 s – não são simultâneos para os observadores B' e C' . O evento R ocorre quando o relógio de B' marca 26 s ; já o evento S ocorre quando o relógio de C' (e portanto também o relógio de B' , já que estes dois observadores estão em estado de repouso relativo) marca 36 s . Tem-se aqui um exemplo da *relatividade da simultaneidade*, uma característica notável da Relatividade Restrita: eventos que acontecem simultaneamente, mas em lugares diferentes, para um dado observador, em geral não ocorrem simultaneamente para um outro observador em movimento em relação ao primeiro.

A.5 Combinação das velocidades - exemplo

O observador B' está em movimento em relação ao observador A e o observador C'' está em movimento em relação ao observador B' .

Sejam $k = 3/2$ o fator de Bondi relacionando B' e A , e $k' = 4/3$ o fator de Bondi relacionando C'' e B' .

O observador A emite pulsos a intervalos de 6 s . Estes pulsos são recebidos por B' a intervalos de

$$6\text{ s} \times \frac{3}{2} = 9\text{ s} . \quad (\text{A.28})$$

Cada vez que B' recebe um pulso vindo de A , ele também emite um pulso. Estes pulsos, emitidos por B' a intervalos de 9 s , são recebidos por C'' a intervalos de

$$9\text{ s} \times \frac{4}{3} = 12\text{ s} . \quad (\text{A.29})$$

O diagrama da Figura A.4 ilustra a situação do ponto de vista do observador A .

Como os pulsos vindos de **A** viajam junto com os pulsos emitidos por **B'**, eles também são recebidos por **C''** a intervalos de 12 s. Portanto, o fator de Bondi relacionando **C''** e **A** é

$$K = \frac{12\text{ s}}{6\text{ s}} = 2. \quad (\text{A.30})$$

Este resultado ilustra obviamente a combinação multiplicativa dos fatores de Bondi, pois

$$\frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = 2. \quad (\text{A.31})$$

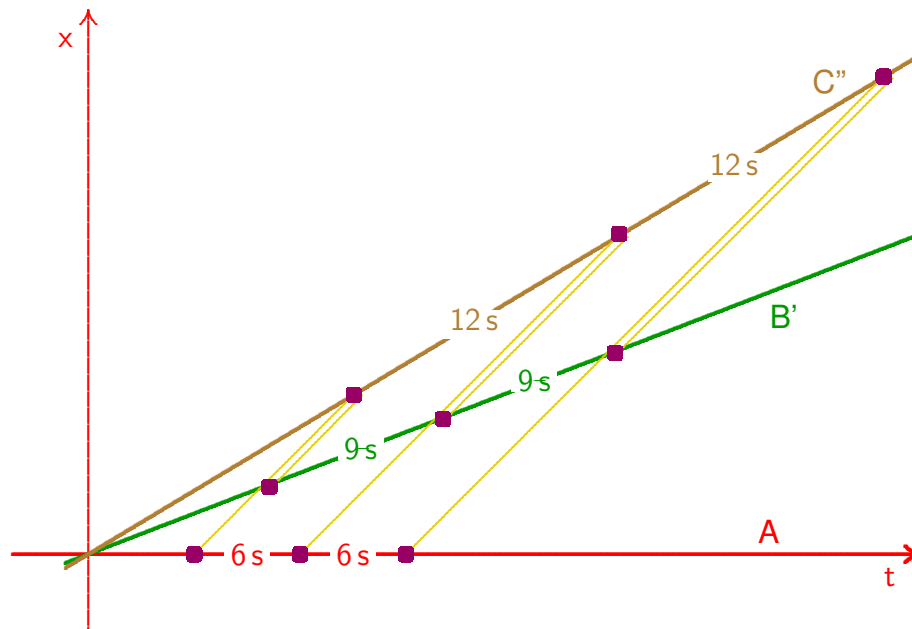


Figura A.4: Diagrama de Minkowski mostrando a situação considerada para a análise da combinação dos fatores de Bondi relativos a movimentos na mesma direção. Os eixos do diagrama referem-se ao referencial do observador **A**. Vê-se as linhas de mundo dos observadores **A**, **B'** e **C''**, e dos pulsos de luz emitidos a intervalos regulares pelos observadores **A** e **B'**. Os intervalos de emissão e/ou recepção dos pulsos, medidos pelo observador envolvido, estão indicados

Como discutido no Capítulo 4, a velocidade relativa v é dada em termos do fator k por [veja a relação (4.8)]

$$v = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} c. \quad (\text{A.32})$$

Portanto, a velocidade de **B'** em relação a **A** é

$$v = \frac{(3/2)^2 - 1}{(3/2)^2 + 1} c = \frac{5}{13} c \quad (\text{A.33})$$

e a velocidade de **C''** em relação a **B'** é

$$v' = \frac{(4/3)^2 - 1}{(4/3)^2 + 1} c = \frac{7}{25} c. \quad (\text{A.34})$$

Utilizando o resultado obtido na combinação dos fatores de Bondi, podemos também calcular a velocidade V de C'' em relação a A :

$$V = \frac{2^2 - 1}{2^2 + 1} c = \frac{3}{5} c. \quad (\text{A.35})$$

A lei de combinação das velocidades, qual seja [veja a fórmula (7.8)]

$$V = \frac{v' + v}{1 + \frac{v'v}{c^2}}, \quad (\text{A.36})$$

corresponde então à relação aritmética

$$\frac{\frac{7}{25}c + \frac{5}{13}c}{1 + \frac{1}{c^2} \times \frac{7}{25}c \times \frac{5}{13}c} = \frac{3}{5}c, \quad (\text{A.37})$$

a qual é facilmente verificada.

Vale notar que, na cinemática de Galileo e Newton, na qual a lei de combinação das velocidades colineares é a simples soma, o resultado para a velocidade de C'' em relação a A seria

$$V_{GN} = v' + v = \frac{7}{25}c + \frac{5}{13}c = \frac{216}{325}c = 0,665c. \quad (\text{A.38})$$

Vê-se que, no exemplo considerado, este valor difere do resultado fornecido pela Relatividade de Einstein $V = 0,6c$ por cerca de 10%. Se as velocidades v e v' envolvidas estivessem ambas muito próximas da velocidade da luz, a diferença se aproximaria de um fator 2, já que V_{GN} estaria próxima de $2c$, ao passo que V permaneceria inferior a c .

A.6 Paradoxo dos gêmeos - exemplo

Sobre o planeta Terra, considerado aqui como um referencial inercial, vive um observador A que é pai de dois filhos gêmeos, $João$ e $Pedro$. Um belo dia, quando $João$ tem 5 anos e $Pedro$ obviamente também tem 5 anos, passa pelo planeta uma nave espacial pilotada pelo observador B' .

Apaixonado por aventuras espaciais e pela Relatividade Restrita, A resolve confiar um dos gêmeos, $João$, ao viajante B' , ao passo que o outro gêmeo, $Pedro$, fica em casa.

Vários anos mais tarde, a nave de B' cruza com outra nave, pilotada por um observador C'' , que viaja na direção oposta, aproximando-se da Terra com a mesma velocidade com a qual B' está se afastando do dito planeta. Sentindo saudade do seu lar, $João$ resolve aproveitar a oportunidade e transfere-se para a nave de C'' . Quando esta nave alcança a Terra, ocorre o reencontro de $João$ com seu irmão gêmeo $Pedro$ e seu pai A .

O diagrama da Figura A.5 ilustra a situação do ponto de vista do observador A . Supomos que a velocidade de B' em relação a A é de $\frac{5}{13}c$, o que corresponde ao fator de Bondi $k = 3/2$ e ao fator de Lorentz $\gamma = 13/12$ [veja as seções A.2 e A.3].

Para simplificar, pode-se supor que, quando os dois observadores A e B' se cruzam, ambos zeram os seus relógios. Para desenvolver o argumento baseado no uso do fator de Bondi, é conveniente supor que, neste evento, o observador B' manda um primeiro pulso de

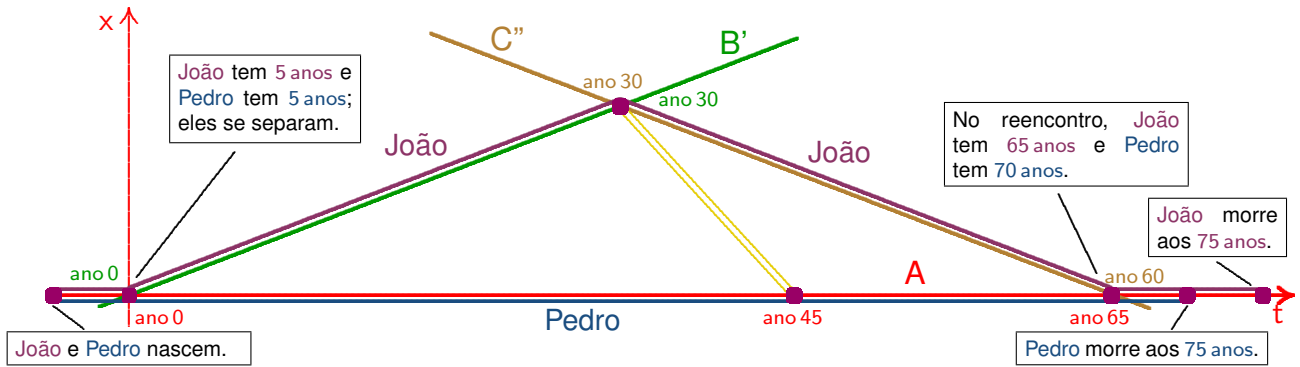


Figura A.5: Diagrama de Minkowski mostrando a situação considerada na ilustração do paradoxo dos gêmeos. Os eixos do diagrama referem-se ao referencial do observador A. Vê-se as linhas de mundo dos observadores A, B' e C'', e dos pulsos de luz emitidos pelos observadores B' e C'' quando cruzam um com o outro. Vê-se também as linhas de mundo dos dois gêmeos, João e Pedro, bem como as descrições de alguns eventos importantes nas suas vidas.

luz para A, que o recebe instantaneamente, já que os dois observadores estão no mesmo lugar.

Supomos que 30 anos mais tarde (pelo seu próprio relógio), B' cruza com C'', que viaja na direção oposta, aproximando-se de A com a mesma velocidade $\frac{5}{13}c$. O fator de Bondi relacionando C'' a A é portanto $1/k = 2/3$.

Quando C'' passa por B', ele ajusta o seu relógio com o de B', que marca 30 anos naquele instante. Já que João acompanhou B' na viagem, ele envelheceu 30 anos e tem agora

$$5 \text{ anos} + 30 \text{ anos} = 35 \text{ anos} . \tag{A.39}$$

Naquele momento, ele abandona a nave de B' e começa a viagem de volta, na nave de C''.

Quando B' cruza com C'', ele manda um segundo pulso de luz para A. Como o intervalo de emissão, por B', dos seus dois pulsos foi de 30 anos, o intervalo de recepção desses pulsos por A, é de

$$\frac{3}{2} \times 30 \text{ anos} = 45 \text{ anos} , \tag{A.40}$$

ou ainda, quando A recebe o segundo pulso de B', o seu relógio marca 45 anos.

Quando C'' cruza com B', ele também manda um pulso de luz para A, que o recebe também quando o seu relógio marca 45 anos.

Como C'' se aproxima de A com a mesma velocidade com a qual B' se afastou, ele leva 30 anos, pelo seu próprio relógio, para chegar até A. Como João acompanha C'', ele envelhece 30 anos durante esta parte da viagem. Portanto, o seu envelhecimento total durante a viagem foi de

$$30 \text{ anos} + 30 \text{ anos} = 60 \text{ anos} \tag{A.41}$$

e, no reencontro com o pai A e o irmão Pedro, ele tem

$$5 \text{ anos} + 60 \text{ anos} = 65 \text{ anos} . \tag{A.42}$$

Podemos imaginar que, quando C'' alcança A, ele manda um segundo pulso para A, que o recebe instantaneamente já que ambos observadores estão então no mesmo lugar. Pela

definição do fator de Bondi, o intervalo de recepção por **A** dos dois pulsos emitidos por **C**” é

$$\frac{2}{3} \times 30 \text{ anos} = 20 \text{ anos} . \quad (\text{A.43})$$

Destes resultados, deduzimos que, no encontro com **C**”, o relógio de **A** marca

$$45 \text{ anos} + 20 \text{ anos} = 65 \text{ anos} . \quad (\text{A.44})$$

Já que **Pedro** permaneceu junto a **A** o tempo todo, ele envelheceu 65 anos e tem

$$5 \text{ anos} + 65 \text{ anos} = 70 \text{ anos} \quad (\text{A.45})$$

no seu encontro com **C**”, que é também o seu reencontro com o irmão gêmeo **João**.

Concluimos que, no reencontro, **João** tem 65 anos e **Pedro** tem 70 anos. Ou seja, *o gêmeo que fez a viagem de ida e volta envelheceu mais lentamente que o outro, que ficou parado.*

Pode-se conferir que a razão entre o envelhecimento de **João**, que viajou, e o de **Pedro**, que ficou parado, é dada pelo inverso do fator de Lorentz, como prevê a fórmula (8.8):

$$\frac{60 \text{ anos}}{65 \text{ anos}} = \frac{12}{13} = \frac{1}{\gamma} . \quad (\text{A.46})$$

Sendo os gêmeos biologicamente idênticos, é plausível que ambos morram ao atingir a mesma idade biológica, por exemplo 75 anos. Mesmo assim, quando **Pedro** falecer, aos 75 anos, **João** terá apenas 70 anos e ele passará os últimos 5 anos da sua vida lamentando a perda do irmão **Pedro**.

Referência Bibliográfica

- **Hermann Bondi**, *Relatividade e Bom Senso: um novo Enfoque das Idéias de Einstein*, Editora Herder, São Paulo, Brasil, 1971.