Concepts de Relativité Restreinte

Michel Betz

3 mars 2020

Préambule

Ce texte présente les principaux concepts cinématiques fondamentaux de la Relativité Restreinte, c'est à dire, la dilatation du temps, la contraction des longueurs et la loi de composition des vitesses colinéaires. Le populaire "paradoxe des jumeaux" est également discuté.

L'approche adoptée a été développée par le cosmologue britannique Hermann Bondi et est connue dans la littérature comme "calcul k", car elle utilise comme quantité fondamentale, pour stipuler la relation entre deux observateurs en mouvement relatif, un facteur adimensionnel pour lequel Bondi a adopté la notation k. Ce facteur n'est rien d'autre que le facteur caractéristique de l'effet Doppler pour la lumière, c'est à dire, le quotient entre les périodes d'émission, par l'un des observateurs, et de réception, par l'autre observateur, de signaux lumineux. Bondi a démontré que l'utilisation de ce facteur dans l'analyse de certaines situations impliquant l'échange d'éclairs de lumière entre deux, ou plusieurs, observateurs permet une déduction particulièrement simple des effets, a priori contre-intuitifs, conséquences des postulats de la Relativité Restreinte.

Dans le présent ouvrage, chaque situation pertinente est présentée et analysée successivement, en utilisant une notation mathématique (algébrique) générique. Dans un appendice, sont considérés des cas concrets de réalisation numérique de ces situations. Des diagrammes de visualisation des mouvements dans l'espace-temps qui y prennent part, connus sous le nom de diagrammes de Minkowski, sont utilisés pour illustrer aussi bien les présentations génériques que les cas particuliers représentatifs.

Ce texte accompagne un ensemble d'animations numériques qui permettent de visualiser sur l'écran, pour chaque situation, les mouvements des divers observateurs, éclairs de lumière et autres entités, avec construction dynamique simultanée du diagramme de Minkowski et d'une table qui enregistre les temps d'occurrence des principaux évènements.

Chapitre 1

Quelques concepts de base

1.1 Introduction

Ce chapitre définit quelques concepts de base, indispensables au développement de la cinématique relativiste et qui seront utilisés systématiquement dans tous les arguments. Il introduit aussi une représentation graphique des mouvements, qui facilitera la visualisation des situations considérées pour établir les principales conséquences des principes de la Relativité Restreinte.

1.2 Évènement

Un ***évènement*** est quelque chose qui a lieu à un certain endroit, à un instant donné. Votre naissance, ou l'émission d'un flash par un appareil photographique, sont des exemples d'évènements. Évidemment, il s'agit, le plus souvent, d'une idéalisation valable si le phénomène en question a une brève durée et se passe dans une région peu étendue de l'espace.

1.3 Observateur

Un ***observateur*** est quelqu'un qui observe et décrit des évènements. Des observateurs distincts peuvent décrir le même évènement de manière différente. Il faut emphatiser qu'il ne s'agit pas ici de différences subjectives, mais bien de différences rationnellement explicables, en particulier à partir des états de mouvement relatif des observateurs.

1.4 Référentiel

Pour décrir un évènement avec précision, un observateur utilise un système de référence, ou ***référentiel***. Un référentiel est constitué d'un système de coordonnées de position, utilisées pour spécifier l'endroit où l'évènement a lieu, et d'une échelle temporelle, utilisée pour spécifier l'instant auquel l'évènement se produit. Les positions peuvent être déterminées avec un mètre ruban (pour mesurer les distances) et un théodolite (pour mesurer les angles). Le temps peut être mesuré avec une horloge. De cette sorte, concrètement, on peut associer un référentiel à un observateur muni d'un mètre ruban, d'un théodolite et d'une horloge. Des observateurs distincts attribuent, en général, au même évènement, des positions différentes et des temps différents.

1.5 Espace-temps

Dans l'étude de la relativité, il est fréquemment commode de réunir l'espace de position (tridimensionnel) et l'échelle de temps (unidimensionnelle) pour former un espace unique, dénommé ***espace-temps*** (tetradimensionnel). À chaque évènement est associé un point dans l'espace-temps. L'histoire d'une entité quelconque peut être considérée comme une succession continue d'évènements. Dès lors, une telle histoire est représentée dans l'espace-temps par une ligne continue, appelée ***ligne d'univers*** de l'entité.

1.6 Diagramme de Minkowski

L'espace-temps des évènements et les lignes d'univers des entités physiques peuvent être visualisés à l'aide d'un ***diagramme de Minkowski***. Il n'est pas possible de dessiner en quatre dimensions, il faut donc "oublier" au moins une des directions de position pour tracer un diagramme de Minkowski. Étant donné qu'une feuille de papier, ou l'écran d'un ordinateur, sont des surfaces bidimensionnelles, davantage de clarté dans le dessin sera obtenue s'il est permis d'"oublier" deux directions de position. La condition pour que cela soit possible est que tous les évènements considérés aient lieu dans l'espace ***sur une même ligne droite***. Cela sera le cas pour toutes les situations concrètes considérées dans ce texte.

Dans un diagramme de Minkowski, un évènement est représenté par un point. Si l'on définit dans le diagramme un système d'axes orthogonaux, le temps d'occurrence de l'évènement sera mesuré le long d'un des axes et la position de l'évènement le long de l'autre axe. Dans le présent texte, le temps d'occurrence est donné, par convention, en abscisse (axe horizontal sur l'écran de l'ordinateur) et la position est donnée en ordonnée (axe vertical sur l'écran). Il faut souligner que ***cette convention est arbitraire et de nombreux livres sur la relativité, et aussi la plupart des articles de recherche, utilisent la convention inverse***. La convention adoptée ici offre l'avantage de correspondre à la représentation graphique usuelle d'une fonction, dans laquelle les valeurs de la variable sont indiquées en abscisse et les valeurs correspondantes de la fonction en ordonnée. Dans un diagramme de Minkowski, la ligne d'univers d'une entité indique la variation de la position de l'entité en fonction du temps.

Comme on le verra lors de la présentation des postulats de la Relativité Restreinte, la vitesse de la lumière dans le vide joue un rôle proéminent dans cette théorie, celui d'une constante universelle. Pour cette raison, il est commode d'utiliser une unité de distance reliée à l'unité de temps de manière que *la vitesse de la lumière soit égale à un*. Un exemple d'unité de distance de ce type, habituellement utilisée en Astronomie, est l'***année-lumière***, qui est simplement la distance parcourue par la lumière en une année. Évidemment, la vitesse de la lumière est alors une année-lumière par an. Dans un tel système d'unités, pendant un intervalle de temps unitaire, un éclair de lumière se déplace d'une distance unitaire. Par conséquent, dans un diagramme de Minkowski, *les lignes d'univers d'éclairs de lumière sont des lignes droites inclinées à 45 degrés*. Selon la Relativité Restreinte, aucun corps ne peut se mouvoir à une vitesse supérieure à celle de la lumière. Donc, dans un diagramme de Minkowski, aucune ligne d'univers ne peut être inclinée à plus de 45 degrés par rapport l'horizontale. Il s'en suit que ces diagrammes seront d'habitude plus larges que hauts. Il faut noter que cette caractéristique résulte du choix de la direction horizontale pour l'axe temporel et constitue une motivation additionnelle pour adopter cette convention : le présent texte accompagne un programme d'animation et l'écran d'un ordinateur est, tout au moins dans son orientation usuelle, plus large que haut.

Puisque les coordonnées de position et de temps dépendent du référentiel, il convient de toujours spécifier quel observateur mesure les valeurs representées en abscisse et en ordonnée dans un diagramme de Minkowski.

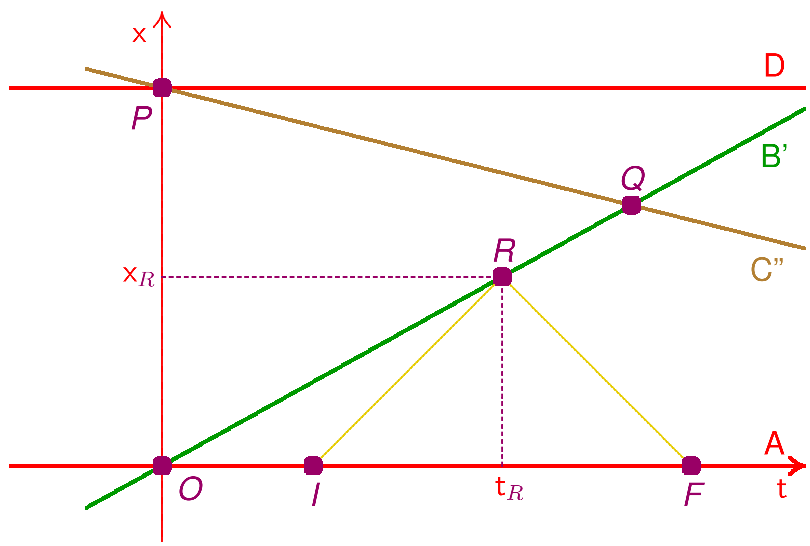

FIGURE 1.1 – *Exemple de diagramme de Minkowski montrant les lignes d'univers de 4 observateurs et d'un éclair de lumière émis par un des observateurs (A), reflété par um second observateur (B') et reçu de retour par le premier. Les lignes d'univers des observateurs sont indiquées par des lettres majuscules normales et les évènements par des lettres majuscules italiques de couleur grenat. Les lignes d'univers des éclairs de lumière sont tracées en couleur jaune. Sur le diagramme, sont aussi indiquées les coordonnées de l'évènement de réflection de l'éclair de lumière, dans le référentiel utilisé, qui est associé à l'observateur A.*

La Figure 1.1 présente une illustration des concepts introduits ci-dessus. Les lignes d'univers de quatre observateurs nommés A, D, B' et C" sont représentées. Les axes de coordonnées indiquent le temps et les positions tels qu'ils sont déterminés par l'observateur A ; en d'autres termes, dans le référentiel utilisé, l'observateur A est au repos, sa position ne se modifie pas et, par conséquent, sa ligne d'univers est une ligne horizontale sur le graphique. C'est aussi le cas de l'observateur D, qui ne se déplace pas par rapport à A, mais est simplement situé à un autre endroit. L'évènement référencé par la lettre *O* correspond au passage de l'observateur B' tout près de l'observateur A et, à partir de ce moment, B' s'éloigne de A. Quelque temps après le passage de B', l'observateur A envoie un éclair de lumière qui est reflété par B' et reçu de retour par A. Les évènements d'émission, réflection et réception de cet éclair sont désignés par *I*, *R* et *F*, respectivement. Le quatrième observateur, C", croise l'observateur D lors de l'évènement désigné par *P* et, à partir de ce moment, commence à s'éloigner de D et venir à la rencontre de A et B', croisant ce dernier lors de l'évènement *Q*.

Il est utile de résumer les conventions adoptées dans la Figure 1.1, qui seront systématiquement utilisées dans ce travail. Un évènement est indiqué par une lettre majuscule en *police italique* et *couleur grenat*. Les lignes d'univers des éclairs de lumière sont représentées en couleur jaune. À chaque observateur sont attribuées une lettre majuscule du début de l'alphabet en **police normale** et une couleur. Deux observateurs qui sont au repos l'un par rapport à l'autre reçoivent la même couleur, mais deux observateurs en mouvement relatif reçoivent des couleurs différentes. Comme le lecteur peut avoir des difficultés pour distinguer les couleurs, ou peut souhaiter imprimer le texte en noir et blanc, une convention addicionnelle, redondante avec la couleur, est aussi utilisée : les référentiels d'observateurs en mouvement relatif sont distingués par le nombre de "primes" accompagnant les symboles associés. Dans l'exemple ci-dessus, on a utilisé les symboles A et D, sans prime pour aucun d'eux, car les observateurs correspondants sont au repos l'un par rapport à l'autre, mais on a écrit B', et non B, pour indiquer que l'observateur B' est en mouvement par rapport aux observateurs A et D. De la même manière, on a employé C" pour indiquer que cet observateur est en mouvement, aussi bien par rapport à A et D que par rapport à B'. Cette convention sera particulièrement utile pour distinguer les coordonnées attribuées au même évènement par deux observateurs en mouvement relatif. Par exemple, les coordonnées de temps et espace attribuées par l'observateur A à l'évènement *R* de réflection de l'éclair sont référencées par t_R et x_R. Puisque, dans le diagramme de la Figure 1.1, le système de coordonnées est celui utilisé par l'observateur A, ces coordonnées peuvent être facilement obtenues par projection orthogonale sur les axes, comme on le voit sur la figure. Par contre, les coordonnées attribuées par B' au même évènement, qui seraient référencées par t'_R et x'_R, ne peuvent pas être facilement visualisées sur le graphique quoique, dans ce cas particulier, comme *R* est un évènement de la vie de B', si, comme il serait naturel, celui-ci choisit sa propre position comme origine de son système de coordonnées spatiales, on aura $\mathrm{x}'_R = 0$, évidemment.

Chapitre 2

Introduction et Principes

2.1 Introduction

Ce chapitre commence par une brève révision de quelques aspects importants de la physique classique, en particulier en ce qui concerne le mouvement des corps et la propagation des ondes. Ensuite, sont énoncés les deux postulats fondamentaux de la Relativité, en mettant en évidence leurs relations et différences avec les concepts classiques rappelés antérieurement.

2.2 Mécanique Classique

La mécanique classique, ou mécanique newtonienne, établit les lois générales du mouvement des corps quand leurs vitesses sont beaucoup plus petites que la vitesse de la lumière.

La première loi de Newton affirme qu'il existe une classe de référentiels dans lesquels tous les corps libres d'influences des autres corps sont en mouvement rectiligne uniforme ou au repos. Ces référentiels sont appelés ***référentiels inertiels***. Un référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel inertiel est aussi inertiel.

En mécanique newtonienne, ***le temps est absolu***, c'est à dire, le même dans tous les référentiels. ***Les lois de la mécanique classique sont formulées dans les référentiels inertiels et sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels***.

La deuxième loi de Newton introduit le concept de ***force*** pour représenter l'influence des autres corps sur le mouvement d'un corps donné. Elle affirme qu'***une force produit une accélération***.

La mécanique newtonienne intègre le ***principe de Galilée*** selon lequel il n'est pas possible, par l'observation de phénomènes physiques ayant lieu à l'intérieur d'un laboratoire, de déterminer si celui-ci est en mouvement rectiligne uniforme ou au repos.

Dans le cadre conceptuel de la mécanique newtonienne, il n'y a pas de limite à la valeur que la vitesse de propagation d'une particule ou d'un signal puisse assumer. Ainsi, cette teorie admet la notion d'influence instantanée à distance. Comme cela est emphatisé ci-dessous, dans la Relativité d'Einstein, une théorie plus précise et générale, il existe une limite à la vitesse de propagation de tout signal et le concept d'action instantanée à distance se réduit à une approximation valable en certaines circonstances seulement.

2.3 Ondes dans un milieu matériel

Les lois de propagation des ondes matérielles sont normalement ***formulées dans le référentiel de repos du milieu de propagation***. Pour une onde sonore, par exemple, la vitesse de propagation de l'onde par rapport au milieu est une propriété caractéristique de ce milieu.

Si le milieu matériel de propagation est en mouvement dans le référentiel de l'observateur, la vitesse de propagation observée pour l'onde résultera de la combinaison de la vitesse du milieu avec la vitesse de propagation de l'onde par rapport au milieu. Par conséquent, la vitesse attribuée à l'onde par l'observateur dépendera de la vitesse du milieu.

La fréquence observée est affectée aussi bien par le mouvement de l'émetteur que par le mouvement du détecteur, par rapport au milieu de propagation.

2.4 La lumière

La lumière est un phénomène ondulatoire, plus précisément, une onde électromagnétique qui, au contraire du son, peut se propager dans les régions de l'espace où aucune matière n'est présente. Toutes les tentatives pour identifier un milieu de propagation (l'hypothétique ***éther***) ont échoué et l'on peut affirmer que la lumière se propage dans le vide.

2.5 Postulats de la Relativité Restreinte

La Relativité Restreinte consiste essentiellement en deux postulats dont les énoncés sont fort simples :

— ***Toutes les lois de la Physique sont valables dans tous les référentiels inertiels.***

— ***La vitesse de la lumière dans le vide est une constante universelle***, indépendante de la fréquence et du mouvement de la source.

Toutefois, l'acceptation simultanée de ces deux postulats conduit immédiatement à une conclusion dramatique : ***la vitesse de la lumière possède la même valeur dans tous les référentiels inertiels***. Une telle conclusion est en contradiction avec nos notions intuitives de combinaison des vitesses mais sa validité a été confirmée par une célèbre expérience réalisée par ***Michelson et Morley***, qui ont démontré que la vitesse de la lumière mesurée dans un laboratoire terrestre n'est pas affectée par le mouvement orbital de la Terre autour du Soleil. Dans ces conditions, il est clair que le développement de la théorie de la Relativité Restreinte exigera ***une profonde révision de nos concepts d'espace et de temps***.

Uniquement sur la base des deux postulats énoncés ci-dessus, il ne serait pas possible d'écarter, a priori, la possible existence d'une particule ou d'un signal capable de se propager à une vitesse supérieure à celle de la lumière. De telles entités, connues dans la littérature sous le nom de ***tachyons***, ont fait l'objet de nombreuses études théoriques et recherches expérimentales. Il est permis d'affirmer, néanmoins, qu'il n'y a pas d'évidence convaincante de leur existence qui, du point de vue théorique, serait fort problématique car elle suggérerait que le passé pourrait être influencé par le futur. Cette question ne sera pas approfondie ici et l'ont adoptera comme hypothèse additionnelle que la vitesse de la lumière dans le vide constitue une limite indépassable, atteinte par les ondes électromagnétiques et peut-être par d'autres champs ou particules, mais jamais excédée.

Chapitre 3

Le facteur k de Bondi

3.1 Introduction

Dans le développement de la Relativité Restreinte, une tâche essentielle est d'établir les relations entre les mesures de temps, distance, et autres grandeurs associées, réalisées par deux observateurs inertiels. Pour cela, il faut d'abord caractériser le mouvement de l'un des observateurs par rapport à l'autre. La procédure la plus usuelle est de stipuler la vitesse relative des observateurs. Toutefois, comme on l'a déjà annoncé au chapitre précédent, la notion de vitesse devra être elle-même réévaluée en Relativité Restreinte et l'invoquer depuis le début est discutable du point de vue conceptuel et, en fait, peu commode en pratique.

À la recherche d'une approche alternative, le cosmologue Hermann Bondi a proposé de commencer par considérer des éclairs de lumière émis par le premier observateur et reçus par le second. Le quotient entre l'intervalle de réception et l'intervalle d'émission de ces éclairs, que Bondi a baptisé de ***facteur*** k, peut être adopté comme quantité de base pour spécifier de façon commode la relation entre les observateurs. S'ils sont au repos l'un par rapport à l'autre, le facteur k sera, évidemment, égal à un, mais si les observateurs s'éloignent ou se rapprochent l'un de l'autre, la valeur de k sera différente de un. Il suffit d'imaginer une séquence d'éclairs émis (et donc reçus) à intervalles réguliers, pour pouvoir interpréter le facteur k comme le quotient entre les périodes de répétition des réceptions et des émissions. Le fait que ce quotient s'écarte de l'unité quand le récepteur est en mouvement par rapport à l'émetteur n'est rien d'autre que l'***effet Doppler***, bien connu en physique ondulatoire classique.

Dans le présent chapitre, sont discutées, sur la base des postulats de la Relativité Restreinte, quelques propriétés élémentaires du facteur k, quantité qui sera utilisée dans tout le développement pour caractériser la relation entre observateurs en mouvement relatif rectiligne et uniforme.

3.2 Situation

Soient trois observateurs A, B' et C, tels que C soit distant de A mais au repos par rapport à A et que B' soit en train de s'éloigner de A et de se rapprocher de C. Chaque observateur porte une montre et les observateurs A et B' transportent aussi avec eux des dispositifs capables d'émettre des éclairs de lumière à intervalles réguliers.

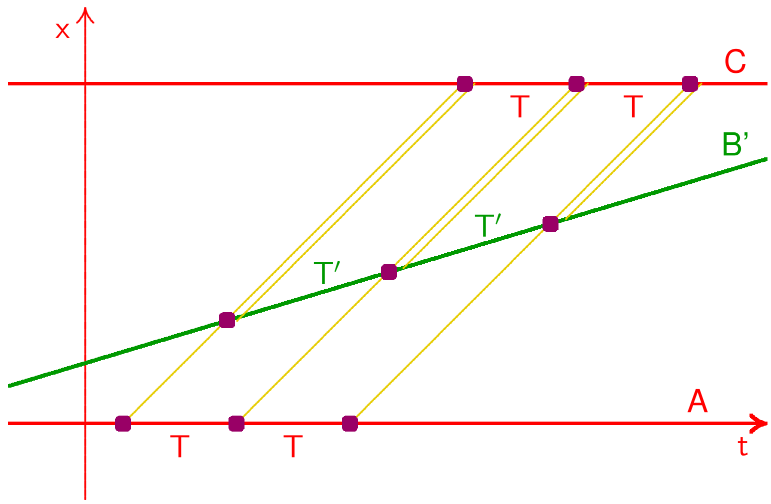

FIGURE 3.1 – *Diagramme de Minkowski montrant la situation considérée pour la définition et la discussion du facteur de Bondi. Les observateurs A et C sont distants mais au repos l'un par rapport à l'autre. L'observateur B' s'éloigne de A et se rapproche de C. Les lignes d'univers de ces trois observateurs sont représentées dans le système de coordonnées associé au référentiel de A. Les lignes d'univers des éclairs de lumière émis par A et B' sont également tracées. Les évènements d'émission et détection des éclairs de lumière sont représentés par des points de couleur grenat.*

L'observateur A émet des éclairs de lumière séparés par des intervalles de temps égaux T (mesurés à la montre de A).

Ces éclairs sont reçus par B' à intervalles réguliers T′ (mesurés à la montre de B'). Chaque fois que l'observateur B' reçoit un éclair de lumière venu de A, lui aussi émet un éclair de lumière.

L'observateur C reçoit les éclairs émis par A e B'.

Cette situation peut être visualisée sur le diagramme de Minkowski de la Figure 3.1.

3.3 Définition

Puisqu'il est en mouvement par rapport à A, l'observateur B' reçoit les éclairs émis par A à des intervalles T′, différents de T. Cet effet, connu comme effet Doppler, est tout à fait familier. Par exemple, le son du moteur d'un avion est plus aigu quand l' avion s'approche de la personne que entend le bruit et devient plus grave quand l'avion s'éloigne. Le mouvement d'approche provoque une augmentation de la fréquence de réception et, par conséquent, une diminution de la période, alors que l'éloignement provoque une diminution de la fréquence de réception et donc une augmentation de la période. Intuitivement, si l'émetteur s'éloigne du recepteur (ou vice versa), chaque crête de l'onde doit parcourir une distance plus grande que l'antérieur, ce qui provoque une augmentation de l'intervalle de réception de crêtes successives. Le même argument s'applique aux éclairs considérés ici : comme l'observateur B' s'éloigne de A, chaque éclair émis par A doit parcourir une distance plus grande que le précédent pour arriver jusqu'à B'. Par conséquent, l'intervalle de réception des éclairs par B' est supérieur à l'intervalle d'émission de ces éclairs par A. Sera utilisée ici l'expression ***facteur* k *de Bondi***, ou simplement ***facteur*** k, pour le quotient de l'intervalle de réception T' des éclairs par B' (mesuré à la montre de B'), par l'intervalle d'émission T des éclairs par A (mesuré à la montre de A) :

$$\boxed{k = \frac{\text{intervalle de réception par B' (montre de B')}}{\text{intervalle d'émission par A (montre de A)}} = \frac{T'}{T}\,.} \tag{3.1}$$

C'est là le facteur de Bondi qui caractérise le mouvement de B' par rapport à A. Il est clair que les rôles de A et B' peuvent être échangés, de manière que le même facteur k caractérise le mouvement de A par rapport à B'.[1] Dans le cas présent, $k > 1$, puisque les deux observateurs s'éloignent l'un de l'autre.

3.4 Analyse

Par la définition ci-dessus, l'intervalle de réception des éclairs par B' est $T' = kT$. Par conséquent, l'intervalle d'émission des éclairs par B' est également $T' = kT$. Étant donné que, d'après le second postulat de la relativité, tous les éclairs de lumière se propagent à la même vitesse, les éclairs émis par A et par B' voyagent côte à côte (par paires) jusqu'à C et sont donc reçus au même intervalle. Cet intervalle, mesuré à la montre de C, est égal à l'intervalle T d'émission des éclairs par A, puisque C est au repos par rapport à A.

3.5 Résumé

A		B'		C
intervalle d'émission T	$\longrightarrow$	intervalle de réception kT		
		intervalle d'émission kT	$\longrightarrow$	intervalle de réception T

1. Cette affirmation est valable dans le cas de la lumière parce que la vitesse de propagation des signaux est la même pour tous les observateurs. Dans le cas d'une onde sonore, il serait nécessaire de considérer, non seulement le mouvement relatif de la source et du récepteur, mais aussi les mouvements de la source et du récepteur par rapport au milieu de propagation.

3.6 Conclusion

Le quotient de l'intervalle de réception des éclairs par C (mesuré à la montre de C) par l'intervalle d'émission par B' (mesuré à la montre de B') é

$$\boxed{\bar{k} = \frac{\text{intervalle de réception par C (montre de C)}}{\text{intervalle d'émission par B' (montre de B')}} = \frac{T}{T'} = \frac{T}{kT} = \frac{1}{k}\,.} \tag{3.2}$$

Le facteur $\bar{k}$ ainsi définit caractérise le mouvement de l'observateur C par rapport à l'observateur B' ou, de façon équivalente, le mouvement de l'observateur B' par rapport à l'observateur C. Dans ce cas, $\bar{k} < 1$, car les deux observateurs en question s'approchent l'un de l'autre.

3.7 Récapitulation

Mouvement relatif de l'émetteur et du recepteur	$\dfrac{\textit{intervalle de réception}}{\textit{intervalle d'émission}}$
ils s'approchent l'un de l'autre ***ils s'éloignent l'un de l'autre***	k $1/k$

3.8 Commentaires

La notion d'un facteur k différent de 1 n'est pas propre à la Relativité Restreinte, il s'agit simplement de l'effet Doppler. Mais la relation explicitée dans le cadre ci-dessus ***est*** caractéristique de la Relativité Restreinte, car elle repose sur la supposition que la vitesse d'un signal lumineux est indépendente des vitesses de l'émetteur et du récepteur.

Le facteur k est fort commode pour caractériser le mouvement relatif de deux observateurs inertiels mais, une fois ce concept introduit, la vitesse relative v, habituellement utilisée comme point de départ dans l'abordage de la Relativité Restreinte, peut naturellement être déduite comme une fonction de k. Celà sera fait au prochain chapitre.

Chapitre 4

Relation entre le facteur k et la vitesse relative v

4.1 Introduction

La plupart des présentations de la Relativité utilisent la vitesse relative pour spécifier la relation cinématique entre deux observateurs. Bien qu'elle soit moins commode que le facteur de Bondi, cette quantité est importante et, dans ce chapitre, la relation entre les deux grandeurs est établie et commentée.

4.2 Situation

Un observateur B' est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un autre observateur A. L'observateur A possède un dispositif capable d'émettre et détecter des éclairs de lumière, alors que l'observateur B' porte un miroir capable de refléter les éclairs envoyés par A.

Quand B' passe tout près de A, tous deux remettent leurs montres à zéro ; si l'on nomme *O* cet évènement, on a donc $\mathrm{t}_O = \mathrm{t'}_O = 0$.

Également quand B' passe près de A, celui-ci envoie un premier éclair de lumière vers B'. Puisque A et B' sont au même endroit à cet instant, cet éclair est reflété essentiellement instantanément par le miroir et l'éclair réfléchi est reçu par A au même instant. En d'autres mots, on peut considérer que les évènements d'émission, réflection et réception de ce premier éclair coïncident tous avec l'évènement *O*.

L'observateur B' commence alors à s'éloigner de A. Ce mouvement relatif d'éloignement des deux observateurs peut être caractérisé par le facteur de Bondi k.

Quelque temps après, l'observateur A envoie un second éclair de lumière vers B' ; cet éclair est réfléchi par le miroir et reçu de retour par A. Soient *I*, *R* et *F*, respectivement, les évènements d'émission (par A), réflection (par B') et réception (par A) de cet éclair.

La situation décrite ci-dessus est représentée sur le diagramme de Minkowski de la Figure 4.1. Naturellement, le premier éclair, dont l'existence possède une durée arbitrairement courte, n'est pas visible. En plus des éléments introduits ci-dessus, le graphique montre la construction nécessaire pour extraire les coordonnées (t_R, x_R) de l'évènement *R* de réflection du second éclair, qui jouent un rôle central dans l'analyse de la section suivante.

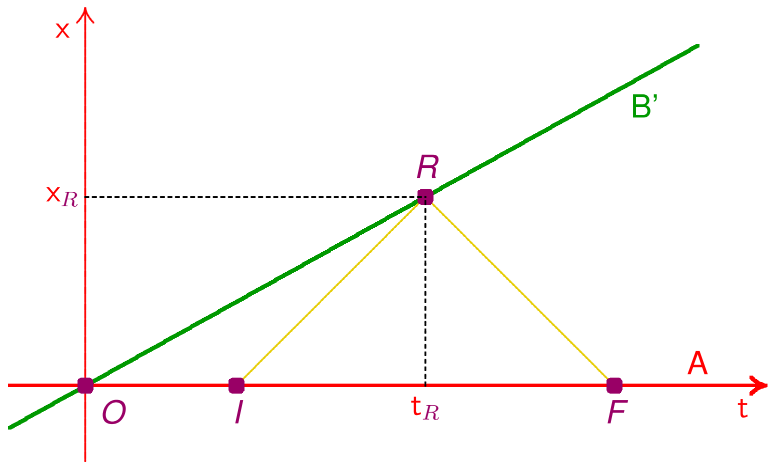

FIGURE 4.1 – *Diagramme de Minkowski montrant la situation considérée pour établir la relation entre le facteur de Bondi et la vitesse relative d'une paire d'observateurs. On y voit les lignes d'univers des deux observateurs A et B' et du (second) éclair de lumière envoyé par le premier observateur et réfléchi par le second. Le détermination graphique des coordonnées de l'évènement de réflection, dans le référentiel de A, est explicitée.*

4.3 Analyse

Dans la notation introduite au début de ce texte, les temps d'émission des deux éclairs, mesurés à la montre de A, sont t_O et t_I et l'intervalle d'émission des éclairs est $t_I - t_O$. Les temps de réflection de ces éclairs, mesurés à la montre de B', sont t'_O et t'_R. Naturellement, une réflection peut être considérée comme une réception suivie immédiatement d'une ré-émission ; donc, l'intervalle de réception des éclairs par l'observateur B' est $t'_R - t'_O$. Par définition du facteur k, on peut alors écrire

$$t'_R - t'_O = k(t_I - t_O) , \tag{4.1}$$

ou, puisque $t_O = t'_O = 0$,

$$t_I = \frac{t'_R}{k} . \tag{4.2}$$

Dans la même notation, les temps de réception, par l'observateur A, des éclairs réfléchis, sont t_O et t_F, respectivement, et l'intervalle de réception de ces éclairs est $t_F - t_O$. Comme cela a déjà été noté, les temps de réflection des éclairs par B' peuvent être interprétés comme temps d'émission des éclair réfléchis et, par conséquent, l'intervalle d'émission de ces éclairs réfléchis, mesuré à la montre de B', est $t'_R - t'_O$. La définition du facteur k peut être appliquée de nouveau pour établir la relation entre l'intervalle de réception, par A, des éclairs réfléchis et l'intervalle d'émission, par B', de ces éclairs. La relation en question est, clairement,

$$t_F - t_O = k(t'_R - t'_O) \ , \tag{4.3}$$

ou, simplement,

$$t_F = k\, t'_R \ . \tag{4.4}$$

Ayant enregistré le temps t_I d'émission du second éclair et le temps t_F de réception de l'éclair réfléchi correspondant, l'observateur A peut attribuer un temps et une position à l'évènement de réflection *R*. Comme le second éclair s'est propagé à la vitesse constante c, il lui a fallut le même temps pour aller jusqu'à l'évènement *R* et pour revenir. Par conséquent, il était en *R* à l'instant médian entre l'instant d'émission et l'instant de réception. C'est à dire que l'observateur A attribue à l'évènement *R* le temps

$$t_R = \frac{t_I + t_F}{2} = \frac{t'_R/k + k\, t'_R}{2} = \frac{k^2+1}{2k} t'_R \ , \tag{4.5}$$

où ont été utilisées les relations (4.2) et (4.4).

La distance entre l'évènement *R* et l'observateur A, c'est à dire, la coordonnée de position x_R attribuée par A à l'évènement *R*, est la moitié de la distance totale parcourue par le second éclair entre son émission et sa réception après réflection par B'. Puisque l'éclair se propage à la vitesse c, on obtient, invoquant à nouveau les relations (4.2) et (4.4) :

$$x_R = \frac{c(t_F - t_I)}{2} = \frac{c(k\, t'_R - t'_R/k)}{2} = \frac{c(k^2-1)}{2k} t'_R \ . \tag{4.6}$$

4.4 Conclusion

Comme l'observateur B' était présent à l'évènement *O* et à l'évènement *R*, pour l'observateur A, l'observateur B' a parcouru la distance x_R dans le temps t_R. Par conséquent, la vitesse v de B' par rapport à A est donnée simplement par

$$v = \frac{x_R}{t_R} \ . \tag{4.7}$$

À partir des résultats (4.5) et (4.6), on obtient, après quelques simplifications élémentaires,

$$\boxed{v = c\frac{k^2-1}{k^2+1} \ .} \tag{4.8}$$

C'est là l'expression de la vitesse relative de deux observateurs dont le mouvement d'éloignement réciproque est caractérisé par le facteur de Bondi k. On peut vérifier que $k = 1$ correspond à $v = 0$ et que l'on a toujours $v < c$.

Pour obtenir la relation inverse, il suffit de réécrir (4.8) sous la forme

$$k^2(c - v) = c + v \tag{4.9}$$

pour déduire

$$\boxed{k = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \ .} \tag{4.10}$$

4.5 Commentaires

À la section antérieure, on a établi la relation entre le facteur de Bondi k et la vitesse relative v dans le cas de deux observateurs qui s'éloignent l'un de l'autre.

Comme cela a été démontré au chapitre précédent, si les observateurs s'approchaient l'un de l'autre, le facteur serait

$$\bar{k} = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\,. \tag{4.11}$$

Les expressions (4.10) et (4.11) sont présentées dans la plupart des livres sur la Relativité à l'occasion de la discussion de l'effet Doppler [1] pour la lumière (ou pour une onde électromagnétique en général), dans les cas d'éloignement et de rapprochement du détecteur par rapport à la source, respectivement.

Il est peut-être utile de souligner que la quantité v considérée ici est, en fait, le module, ou valeur absolue, de la vitesse relative des observateurs. Une approche plus conventionnelle consiste à attribuer arbitrairement un sens positif à la ligne de mouvement du second observateur par rapport au premier, et à considérer $v > 0$ si le mouvement a lieu dans ce sens et $v < 0$ s'il a lieu dans le sens contraire. Une telle attribution spécifie le mouvement relatif par la valeur de $v \in]-c,+c[$, pour toute la durée du mouvement, sans distinguer les situations d'éloignement et de rapprochement des observateurs. Par contre, dans l'abordage de Bondi utilisé ici, si le mouvement relatif est spécifié par $k > 1$ dans la phase d'éloignement, le même mouvement aura dû être spécifié par $\bar{k} = 1/k < 1$ dans la phase de rapprochement.

1. Sous la forme présentée ici, il s'agit des expressions du quotient de la période de réception par la période d'émission. Si l'on considère les fréquences plutôt que les périodes, les expressions sont inverties, puisque la fréquence est l'inverse de la période.

Chapitre 5

Dilatation du temps

5.1 Introduction

On entend fréquemment l'affirmation selon laquelle Einstein a établi la relativité du temps. Une affirmation plus précise est que des observateurs en mouvement relatif attribueront des valeurs différentes à l'intervalle de temps entre deux évènements. Par exemple, si un observateur compare la marche d'une montre portée par un autre observateur en mouvement par rapport à lui à celle de sa propre montre, il constatera que la montre en mouvement prend du retard ; c'est à dire que l'intervalle entre “tics” de la montre en mouvement sera plus grand que l'intervalle entre “tics” de sa propre montre. Le quotient entre ces intervalles est une fonction simple du facteur de Bondi - ou de la vitesse - qui caractérise le mouvement de l'un des observateurs par rapport à l'autre.

5.2 Situation

La situation considérée est la même qu'au chapitre antérieur et est représentée sur le diagramme de Minkowski de la Figure 4.1. Les deux évènements centraux dans l'analyse sont deux “tics” de la montre portée par l'observateur B'. Pour simplifier l'argument, on peut supposer que le premier “tic” a lieu à l'évènement *O*, c'est à dire, quand les deux observateurs se croisent, et que le second “tic” se produit quand le second éclair de lumière est réfléchi par le miroir porté par B', c'est à dire, lors de l'évènement *R*.

Comme au chapitre antérieur, on supposera que les deux observateurs règlent leurs montres quand ils se croisent, de manière qu'aussi bien la montre de A que celle de B' indiquent zéro quand le premier “tic” a lieu : $\mathrm{t}_O = \mathrm{t'}_O = 0$. Le temps indiqué par la montre de B' quand le second ‘tic” considéré se produit est référencé comme $\mathrm{t'}_R$ et le temps attribué par l'observateur A au même évènement est référencé comme t_R. L'intervalle entre les deux “tics” est donc $\mathrm{t'}_R$ selon la montre de B' et t_R selon la montre de A. Le quotient $\mathrm{t}_R/\mathrm{t'}_R$ de la seconde valeur par la première est la quantité digne d'intérêt. Si le temps était universel, s'écoulant au même rythme pour tous les observateurs, ce quotient serait, évidemment, égal à un.

5.3 Analyse

Comme le second “tic” de la montre portée par l’observateur B’ coïncide avec l’évènement *R*, le temps marqué par la montre de l’observateur A quand il a lieu est le temps attribué par A à l’évènement *R*, un temps qui a déjá été calculé au chapitre antérieur, qui a fourni le résultat [voir l’expression (4.5)]

$$t_R = \frac{t'_R/k + k\, t'_R}{2} \,. \tag{5.1}$$

Le quotient entre les intervalles séparant les "tics”, mesurés par chaque observateur, est donc

$$\frac{t_R}{t'_R} = \frac{1/k + k}{2} \equiv \gamma \,, \tag{5.2}$$

où l’on a introduit la notation conventionnelle γ pour cette importante quantité, connue sous le nom de ***facteur de Lorentz***. Utilisant l’expression (4.10) obtenue antérieurement pour le facteur k en fonction de la vitesse relative v, on obtient facilement l’expression du facteur de Lorentz en fonction de v :

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} + \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\right) = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \,, \tag{5.3}$$

ou

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,.} \tag{5.4}$$

Naturellement, $\gamma = 1$ si les deux observateurs sont au repos l’un par rapport à l’autre. Pour des observateurs en mouvement relatif, on a toujours $\gamma > 1$ et le facteur γ croit indéfiniment quand la vitesse relative des deux observateurs s’approche de la vitesse de la lumière.

5.4 Résumé

Pour résumer, en utilisant une notation plus générale, le résultat obtenu, il est commode d’adopter la lettre grecque Δ pour indiquer un intervalle de variation d’une quantité donnée. Par exemple, la notation $\Delta t'$ représente la variation (ici, entre les évènements *O* et *R*) du temps marqué par la montre portée par l’observateur B’ et l’expression Δt référencie la variation du temps marqué par la montre de l’observateur A (entre les mêmes évènements). Dans le développement ci-dessus, on a $\Delta t' = t'_R$ et $\Delta t = t_R$. Il s’en suit que la relation (5.2) prend la forme

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \,. \tag{5.5}$$

La différence essentielle entre les observateurs B’ et A est que, pour le premier, la montre dont les “tics” sont les évènements considérés est au repos alors que, pour le second, la montre en question se meut à la vitesse v. Pour mettre en évidence ce point essentiel, il est commode d’utiliser la notation Δt_0 pour l’intervalle de temps indiqué par la montre au repos et la notation Δt_v pour l’intervalle correspondant, mesuré à la montre d’un observateur qui voit la première montre se mouvoir à la vitesse v. Dans la situation analysée ci-dessus, on a donc $\Delta t' = \Delta t_0$ et $\Delta t = \Delta t_v$, de sorte que la relation (5.5) devient

$$\boxed{\Delta t_v = \gamma \Delta t_0 \ \text{ avec } \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > 1 \ .} \tag{5.6}$$

L'expression ***intervalle de temps propre*** est fréquemment utilisée en référence à Δt_0, l'intervalle entre "tics" d'une montre, mesuré dans un référentiel dans lequel cette montre est au repos.

5.5 Conclusion

Un observateur constate que le déplacement des aiguilles d'une montre en mouvement indique un intervalle de temps Δt_0. Comparant ce déplacement des aiguilles à celui de la montre qu'il porte lui-même, il note que celui-ce ne correspond pas au même intervalle de temps, mais bien a l'intervalle Δt_v, tel que $\Delta t_v = \gamma \Delta t_0 > \Delta t_0$. Faisant confiance, bien entendu, à sa propre montre, il en conclut que ***la montre en mouvement retarde***. Ce phénomène est connu sous le nom de ***dilatation du temps***.

Il convient d'insister sur les points suivants :

— Il est facile de vérifier que l'expression (5.2) est invariante par l'échange $k \leftrightarrow 1/k$ et, par conséquent, pour une valeur donnée de la vitesse relative, la dilatation du temps est la même dans les situations d'approche et d'éloignement des observateurs. Il faut souligner cette différence entre l'effet Doppler et la dilatation du temps : dans l'effet Doppler, on observe une augmentation de la période si la source s'éloigne et une diminution de la période si la source s'approche ; en contraste, le passage du temps est sujet à la dilatation uniquement, il n'y a jamais compression du temps.

— L'effet est réciproque. Pour B', c'est la montre portée par A qui est en mouvement et est donc en retard.

— Du point de vue théorique, la dilatation du temps est une conséquence irréfutable des postulats de la Relativité.

5.6 Illustration

La dilatation du temps est vérifiée expérimentalement, par exemple lors de la désintégration de particules instables produites par les rayons cosmiques quand ils pénétrent dans l'atmosphère terrestre. On peut imaginer que ces particules possèdent une "horloge interne" qui détermine leur temps de vie propre Δt_0. Dans le référentiel de la Terre, les particules se propagent à la vitesse v proche de (quoique inférieur à) celle de la lumière. Le temps qu'elles prennent pour traverser l'atmosphère est $\Delta t = H/v$, où H est la hauteur de l'atmosphère, mesurée dans le référentiel de la Terre. [1] On constate que $\Delta t > \Delta t_0$, de telle sorte que, si la dilatation du temps n'avait pas lieu, les particules disparaîtraient avant de pouvoir être détectées dans un laboratoire construit sur la surface de la Terre. Mais, grâce à la

1. L'importance d'expliciter le référentiel dans lequel on mesure une hauteur, ou une longueur, est le sujet du prochain chapitre.

dilatation du temps, le temps de vie des particules dans le référentiel de la Terre est Δt_v, beaucoup plus grand que Δt_0, puisque le facteur de Lorentz γ est beaucoup plus grand que un. Pour une particule dont la vitesse est suffisamment proche de la vitesse de la lumière, Δt_v sera supérieur à Δt et la particule survivra pendant un temps suffisant pour qu'elle traverse toute l'atmosphère et soit détectée au niveau du sol.

Chapitre 6

Contraction des longueurs

6.1 Introduction

Établir la géométrie de l'espace signifie donner un sens à la distance entre deux points ou, plus concrètement, aux dimensions d'un objet rigide. Si l'objet est au repos, il n'y a pas de difficulté. Par exemple, si un observateur est sur une plateforme, il pourra déterminer la longueur de celle-ci en marchant d'une extrémité à l'autre et en comptant le nombre de pas. Comme la plateforme ne bouge pas, il n'y a pas lieu de se préoccuper de la simultanéité des évènements utilisés, l'observateur peut prendre tout son temps pour parcourir le trajet. Naturellement, pour une détermination plus précise, on fera usage des principes fondamentaux de la physique et, en particulier, de l'invariance de la vitesse de la lumière. On placera un miroir à une des extrémités de la plateforme et, à partir de l'autre extrémité, on enverra un éclair de lumière qui sera réfléchi par le miroir. Soit *E* l'évènement d'émission de l'éclair et *D* l'évènement de détection de l'éclair réfléchi, la longueur de la plateforme sera donnée par $L_0 = c\frac{t_D - t_E}{2}$, où c est la vitesse de la lumière et les temps t_D et t_E sont mesurés à la montre de l'observateur qui est immobile sur la plateforme. La longueur ainsi déterminée est connue sous le nom de ***longueur au repos***, ou ***longueur propre*** de la plateforme, car elle est mesurée par un observateur qui est immobile par rapport à celle-ci.

Quand l'objet dont on souhaite mesurer la longueur est en mouvement par rapport à l'observateur qui effectue la mesure, celui-ci doit prendre soin de garantir que les évènements sélectionnés à chaque extrémité de l'objet pour calculer la distance qui les sépare, ont lieu ***simultanément*** pour l'observateur en question.

6.2 Situation

L'observateur A souhaite déterminer la longueur L (pour lui) d'une plateforme qui est en mouvement par rapport à lui à la vitesse v, qui correspond au facteur de Bondi k. Deux observateurs B' et C' sont immobiles sur la plateforme, chacun à une extrémité de celle-ci. Tous deux portent un miroir. Pour eux, la longueur de la plateforme est L'. Comme la plateforme est au repos par rapport à ces observateurs, il s'agit de la longueur propre L_0 de la plateforme. On a donc $L' = L_0$. On supposera que cette longueur a été mesurée à l'avance par B', par exemple, en envoyant un éclair de lumière sur le miroir de C' et en détectant l'éclair réfléchi, suivant la procédure décrite à la Section 6.1. On supposera encore que B' a communiqué le résultat à A.

Pour attribuer lui même une valeur à la longueur de la plateforme, l'observateur A devra calculer la distance entre deux évènements qui ont lieu simultanément (de son point de vue) à chaque extrémité de la plateforme. Ces évènements seront les réflections d'éclairs de lumière par les miroirs.

On supposera que B' passe près de A avant C' et on supposera aussi, pour simplifier les arguments, que quand C' passe près de A, tous deux remettent leurs montres à zéro. Il sera utile d'imaginer qu'à ce même évènement, A envoie un éclair de lumière à C' ; cet éclair (qui sera référencié comme éclair 0) est reçu et réfléchi instantanément par C', et l'éclair réfléchi est reçu instantanément par A. En d'autres mots, les évènements d'émission, réflection et réception de cet éclair 0 coïncident ; cet évènement sera dénommé *O*. Par convention de notation, t_O représente le temps attribué par l'observateur A à l'évènement et t'_O représente le temps attribué par l'observateur C' au même évènement. Dans les conditions stipulées ci-dessus, $t_O = t'_O = 0$. Évidemment, la montre de B' doit aussi être remise à zéro de manière que, pour B' et C', leurs montres marqueront toujours le même temps, puisqu'ils sont en état de repos relatif.

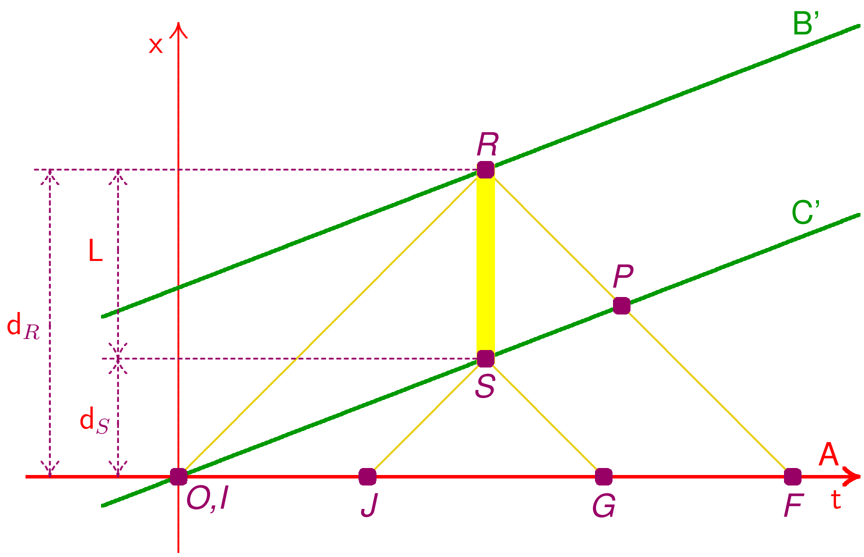

FIGURE 6.1 – *Diagramme de Minkowski montrant la situation considérée dans l'analyse de la contraction de la longueur d'une plateforme. Les axes du diagramme sont associés au référentiel de l'observateur A pour lequel la plateforme est en mouvement. On peut voir les lignes d'univers des deux observateurs B' et C' situés aux extrémités de la plateforme et immobiles par rapport à celle-ci. Pour A, les deux éclairs de lumière qu'il envoie sont réfléchis simultanément par les miroirs portés par B' et C'. La détermination graphique de la longueur attribuée à la plateforme par l'observateur A est explicitée.*

Pour déterminer la longueur de la plateforme, A envoie deux éclairs 1 et 2, qui sont réfléchis par B' et C' respectivement. Puisque B' est plus éloigné de A que C', l'éclair qui ira jusqu'à B' doit être envoyé le premier (éclair 1) ; l'éclair qui sera réfléchi par C' est envoyé plus tard (éclair 2). Comme l'on verra, les temps d'émission de ces éclairs devront être combinés de manière que les réflections aient lieu simultanément pour A. Pour simplifier la discussion le plus possible, il sera commode de supposer que l'émission de l'éclair 1 se produit quand l'observateur C' passe près de l'observateur A. Cet évènement sera dénommé *I*, la lettre I servant à rappeler qu'il s'agit de l'évènement initial de l'éclair. Compte tenu de cette convention, l'évènement *I* coïncide, en fait, avec l'évènement *O* et l'on a $\mathrm{t}_I = \mathrm{t'}_I = 0$. L'évènement de réflection du premier éclair par B' sera référencié par *R* et l'évènement de réception par A de l'éclair réfléchi correspondant sera dénommé *F*, le choix de la lettre F étant destiné à rappeler qu'il s'agit de l'évènement final de la vie de cet éclair.

L'éclair 2, qui sera réfléchi par C', est envoyé par A quelque temps après. Par analogie avec la succession d'évènements $I \to R \to F$ dans la vie de l'éclair 1, sera introduite la séquence d'évènements $J \to S \to G$ dans la vie de l'éclair 2, dénommant *J* l'évènement d'émission de cet éclair et *G* l'évènement de réception par A de l'éclair réfléchi correspondant. La lettre *S* est utilisée pour référencer l'évènement de réflection de cet éclair par l'observateur C'.

Le diagramme de Minkowski illustrant la situation décrite ci-dessus est présenté dans la Figure 6.1

6.3 Analyse

Les évènements d'émission, par l'observateur A, des éclairs 0 et 2 sont *O* et *J*, respectivement. Donc, l'intervalle d'émission de ces éclairs, mesuré à la montre de A, est $\mathrm{t}_J - \mathrm{t}_O$. Les évènements de réception de ces éclairs par l'observateur C' sont *O* et *S*, respectivement. Par conséquent, l'intervalle de réception de ces éclairs, mesuré à la montre de C', est $\mathrm{t'}_S - \mathrm{t'}_O$. Par définition du facteur de Bondi

$$\mathrm{t'}_S - \mathrm{t'}_O = \mathrm{k}(\mathrm{t}_J - \mathrm{t}_O) \ , \tag{6.1}$$

ou simplement, étant donné que $\mathrm{t}_O = \mathrm{t'}_O = 0$,

$$\mathrm{t'}_S = \mathrm{k}\,\mathrm{t}_J \ . \tag{6.2}$$

L'observateur C' envoie l'éclair 0 réfléchi lors de l'évènement *O* et l'éclair 2 réfléchi lors de l'évènement *S*. Donc, l'intervalle d'émission de ces éclairs réfléchis est $\mathrm{t'}_S - \mathrm{t'}_O$. Les évènements de réception, par A, de ces éclairs réfléchis sont *O* et *G*, respectivement. L'intervalle de réception de ces éclairs est, donc, $\mathrm{t}_G - \mathrm{t}_O$. Invoquant à nouveau la définition du facteur de Bondi, on peut écrire

$$\mathrm{t}_G - \mathrm{t}_O = \mathrm{k}(\mathrm{t'}_S - \mathrm{t'}_O) \ , \tag{6.3}$$

ou encore, rappelant une fois de plus que $\mathrm{t}_O = \mathrm{t'}_O = 0$,

$$\mathrm{t}_G = \mathrm{k}\,\mathrm{t'}_S = \mathrm{k}^2\,\mathrm{t}_J \ , \tag{6.4}$$

où on a utilisé la relation (6.2).

Il convient maintenant de tourner l'attention vers l'éclair 1. Après avoir été réfléchi par B', il passe tout près de C', sur son chemin de retour vers A ; on dénommera *P* cet évènement. La détection, par C', de l'éclair qui passe près de lui peut être considérée comme une absorption suivie d'une immédiate réémission. De cette façon, on peut dire que l'observateur

C' a émis des éclairs aux évènements *O* (l'éclair 0) et *P* (l'éclair 1 détecté sur son chemin de retour vers A). L'intervalle d'émission de ces éclairs est $t'_P - t'_O$. Ces éclairs sont reçus par A aux évènements *O* et *F*, respectivement. L'intervalle de réception, mesuré à la montre du récepteur, est donc $t_F - t_O$. Faisant à nouveau appel à la définition du facteur de Bondi, il est permis d'écrire

$$t_F - t_O = k(t'_P - t'_O) \ , \tag{6.5}$$

ou simplement,

$$t_F = k\,t'_P \ . \tag{6.6}$$

Entre les évènements *I* et *P*, l'éclair 1 a voyagé de C' jusqu'à B' et est revenu à C'. Du point de vue de C' et B', il a parcouru, à la vitesse de la lumière, la distance $2\,L'$ entre les instants t'_I et t'_P ; on peut donc écrire

$$2\,L' = c(t'_P - t'_I) = c\,t'_P \ , \tag{6.7}$$

puisque $t'_I = 0$. De (6.6) et (6.7), on tire

$$t_F = \frac{2\,k\,L'}{c} \ . \tag{6.8}$$

Puisque la lumière met le même temps pour aller de A à B' et pour revenir, l'observateur A attribue à l'évènement de réflection de l'éclair 1 par B' le temps

$$t_R = \frac{t_I + t_F}{2} = \frac{k\,L'}{c} \ , \tag{6.9}$$

où a été utilisée la relation (6.8), rappelant que $t_I = 0$. Par le même argument, l'observateur A attribue à l'évènement de réflection par C' de l'éclair 2 le temps

$$t_S = \frac{t_J + t_G}{2} = \frac{1 + k^2}{2} t_J \ , \tag{6.10}$$

ou on a fait appel à la relation (6.4).

Pour que toute cette procédure puisse être considérée comme une mesure, par A, de la longueur de la plateforme, l'observateur A doit envoyer le second éclair à l'instant tel que les évènements utilisés pour la mesure, à savoir, les évènements de réflection *R* et *S* aux deux extrémités de la plateforme, soient simultanés (pour lui, l'observateur A). En d'autres termes, il faudra qu'il choisisse l'instant t_J auquel il émet le second éclair de manière à obtenir $t_S = t_R$, ce qui, d'après (6.9) et (6.10), exige que

$$t_J = \frac{2\,k\,L'}{(1 + k^2)c} \ . \tag{6.11}$$

Par supposition, sont connus de l'observateur A : le facteur de Bondi k qui caractérise le mouvement de la plateforme par rapport à lui et la longueur L', qui a été mesurée et communiquée par les observateurs qui sont sur la plateforme. Par conséquent, l'observateur A peut réaliser le calcul (6.11) et envoyer l'éclair 2 au bon moment.

Soient d_R et d_S les distances, par rapport à l'observateur A, des endroits où ont lieu les évènements *R* et *S*, respectivement. Puisque la lumière se propage toujours à la vitesse c, on a, en utilisant (6.8) et en se rappelant que, par choix, $t_I = 0$:

$$2\,d_R = c(t_F - t_I) = 2\,k\,L' \,. \tag{6.12}$$

De la même manière, utilisant (6.4) et (6.11), on a

$$2\,d_S = c(t_G - t_J) = c(k^2 - 1)t_J = \frac{2\,k(k^2-1)}{k^2+1}\,L' \,. \tag{6.13}$$

La longueur attribuée à la plateforme par l'observateur A sera donc, évidemment,

$$L = d_R - d_S = (1 - \frac{k^2-1}{k^2+1})k\,L' = \frac{2k}{k^2+1}\,L' \,. \tag{6.14}$$

Invoquant la relation, obtenue antérieurement, entre le facteur de Bondi k et la vitesse v d´éloignement relatif de deux observateurs, à savoir [équation (4.10)],

$$k = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \,, \tag{6.15}$$

il est facile de vérifier que

$$\frac{2k}{k^2+1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \,, \tag{6.16}$$

où γ est le facteur de Lorentz, qui a déjà été introduit au Chapitre 5 .

6.4 Résumé

Insérant le resultat (6.16) dans la relation (6.14), on a donc

$$L = \frac{L'}{\gamma} \,. \tag{6.17}$$

La différence essentielle entre les observateurs B' et A est que, pour le premier, la plateforme dont il mesure la longueur est au repos alors que, pour le second, elle se meut à la vitesse v. Pour mettre en évidence cet aspect essentiel, il est commode d'utiliser la notation L_0 (déjà introduite ci-dessus) pour la longueur de la plateforme au repos et la notation L_v pour la longueur correspondante, mesurée par un observateur qui voit la plateforme se mouvoir à la vitesse v. Dans la situation analysée ci-dessus, on a alors $L' = L_0$ et $L = L_v$, de manière que la relation (6.17) devient

$$\boxed{L_v = \frac{L_0}{\gamma} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > 1 \,.} \tag{6.18}$$

Comme cela a déjà été mentioné, l'expression ***longueur propre*** est fréquemment employée en référence à L_0, la longueur de la plateforme, ou de n'importe quel autre objet, mesurée dans le référentiel dans lequel l'objet en question est au repos.

6.5 Conclusion

Généralisant ce résultat, on peut affirmer que ***pour qui observe un objet en mouvement, cet objet paraît contracté dans la direction de son mouvement***. Ce phénomène est connu comme ***contraction des longueurs*** ou ***contraction de Lorentz***, en hommage au physicien qui l'a considérée le premier, quoique sur la base d'arguments assez différents de ceux qui sont pertinents dans le cadre de la Relativité Restreinte d'Einstein.

Il convient de souligner les points suivants :

— En ce que concerne cet effet, il est indifférent de savoir si l'objet en mouvement s'éloigne ou se rapproche, puisque le facteur γ est le même dans ces deux situations, pour une valeur donnée de la vitesse relative v.

— L'effet est réciproque : un objet qui serait au repos par rapport à l'observateur A paraîtrait contracté, du même facteur γ, aux observateurs B' et C'.

— Il s'agit d'un effet cinématique réel, et non d'une illusion associée à l'observation de l'objet à l'aide de la lumière.

6.6 Illustration

La propagation jusqu'à la surface de la Terre et la détection des particules instables produites par l'impact des rayons cosmiques sur la haute atmosphère, qui ont été mentionées à la fin du chapitre antérieur comme illustration de la dilatation du temps, peuvent aussi être analysées en invoquant la contraction des longueurs. Pour cela, il suffit d'adopter le point de vue d'un observateur qui accompagne une particule qui se propage, à la vitesse v, depuis les régions supérieures de l'atmosphère jusqu'au niveau du sol. Pour rester consistent avec les conventions adoptées lors de la discussion du chapitre antérieur, on nommera B' cet observateur et A un observateur au repos sur la Terre. À cause de la contraction des longueurs, l'observateur qui accompagne la particule voit le sol (et, par conséquent, le détecteur), initialement à une distance $H' = H_v = H_0/\gamma$, où $H_0 \equiv H$ est la hauteur de l'atmosphère mesurée par l'observateur terrestre A et γ est le facteur de Lorentz associé à la vitesse v. Comme le sol se rapproche à la vitesse v, le détecteur situé dans un laboratoire terrestre prend l'intervalle de temps $\Delta t' = H'/v = H_v/v = H_0/(\gamma v)$ pour atteindre la particule. Si la vitesse v est suffisamment proche de la vitesse de la lumière, le facteur de Lorentz γ sera très grand et l'intervalle $\Delta t'$ sera inférieur au temps de vie propre Δt_0 de la particule. Par conséquent, le détecteur arrivera avant que la particule ne se désintègre et celle-ci pourra être détectée.

Chapitre 7

Combinaison des vitesses

7.1 Introduction

Selon notre compréhension usuelle de la vitesse, la règle de combinaison de vitesses associées à des mouvements dans la même direction est la simple addition. Par exemple, quelqu'un qui marche à $5\,\mathrm{km/h}$ sur un tapis roulant à $3\,\mathrm{km/h}$ se déplace à la vitesse de $8\,\mathrm{km/h}$ par rapport au hall de l'aérogare. Il est facile de percevoir que cette règle doit perdre sa validité quand les vitesses sont des fractions appréciables de la vitesse de la lumière, car elle pourrait conduire à une vitesse résultante supérieure à la vitesse de la lumière, ce qui n'est pas permis par la Relativité Restreinte.

Dans le présent chapitre, on déduit la loi relativiste de combinaison de vitesses parallèles. La loi de combinaison des facteurs de Bondi, qui est une conséquence quasi triviale de la définition, est obtenue d'abord. À partir de cette loi et de la relation entre facteur de Bondi et vitesse relative, déjà établie au Chapitre 4, on arrive facilement au résultat recherché.

7.2 Situation

Soient trois observateurs A, B' et C". L'observateur B' s'éloigne de l'observateur A à la vitesse v par rapport à A. L'observateur C" s'éloigne de B' à la vitesse v' par rapport à B'. Ces mouvements ont lieu dans la même direction et le même sens.

La question qui se pose est : quelle est la vitesse de l'observateur C" par rapport à l'observateur A ?

Pour permettre une analyse basée sur l'emploi du facteur de Bondi, on supposera que l'observateur A émet des éclairs de lumière séparés par des intervalles de temps T (mesurés à la montre de A). Ces éclairs sont détectés par B' à intervalles T' (mesurés à la montre de B'). Chaque fois que l'observateur B' détecte un éclair venu de A, lui aussi émet un éclair de lumière. Les éclairs émis par A et B' se propagent côte à côte vers l'observateur C", qui les détecte à intervalles T'' (mesurés à la montre de C").

La situation décrite ci-dessus peut être visualisée sur le diagramme de Minkowski de la Figure 7.1.

7.3 Analyse

Soit k le facteur de Bondi associé à la vitesse v et k' le facteur associé à la vitesse v'.

Les éclairs émis par A à intervalles T sont reçus par B' à intervalles T'. Suivant la définition du facteur de Bondi :

$$T' = kT. \tag{7.1}$$

L'intervalle d'émission des éclairs de B' est aussi T'. Ces éclairs sont reçus par C" à intervalles T''. Invoquant à nouveau la définition du facteur de Bondi, on a

$$T'' = k'T'. \tag{7.2}$$

Comme les éclairs émis par A accompagnent les éclairs émis par B', ils sont également reçus par C" à intervalles T''. Insérant dans la relation (7.2) l'expression (7.1) de l'intervalle mesuré par B', on obtient la relation suivante entre les intervalles mesurés par A et par C" :

$$T'' = k'kT. \tag{7.3}$$

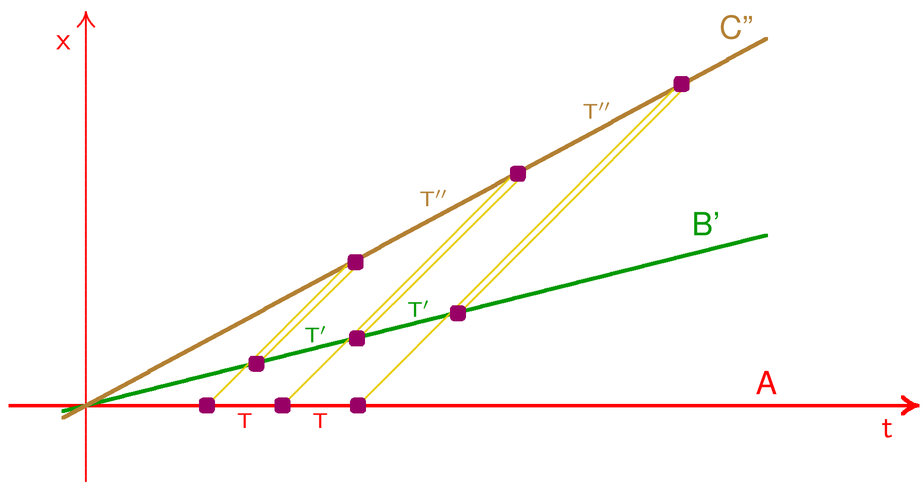

FIGURE 7.1 – *Diagramme de Minkowski montrant la situation considérée dans l'analyse de la combinaison des facteurs de Bondi relatifs à des mouvements dans la même direction. Les axes du diagramme se rapportent au référentiel de l'observateur A. On peut voir les lignes d'univers des observateurs A, B' et C", et des éclairs de lumière émis à intervalles réguliers par les observateurs A et B'. Les intervalles d'émission et/ou de réception des éclairs, mesurés par l'observateur concerné, sont indiqués sur la figure.*

Soit K le facteur de Bondi associé au mouvement de C" par rapport à A. Selon la définition de cette quantité, on peut écrire la relation

$$T'' = KT. \tag{7.4}$$

En comparant les deux expressions (7.3) et (7.4) de T'', on conclut que

$$K = k'k\,. \tag{7.5}$$

C'est à dire que ***la loi de combinaison des facteurs k de Bondi est la simple multiplication***.

7.4 Conclusion

Soit V la vitesse de l'obervateur C" par rapport à l'observateur A. En utilisant la relation (4.8), on obtient l'expression de la vitesse V en fonction du facteur de Bondi K :

$$V = c\frac{K^2 - 1}{K^2 + 1} \,. \tag{7.6}$$

En y insérant l'expression (7.5) de K en fonction de k' et k et en substituant ensuite à ces quantités leurs expressions en termes de v' et v, données par la formule (4.10), on a

$$V = c\frac{k'^2k^2 - 1}{k'^2k^2 + 1} = c\frac{\frac{c+v'}{c-v'} \times \frac{c+v}{c-v} - 1}{\frac{c+v'}{c-v'} \times \frac{c+v}{c-v} + 1} = c\frac{v'c + vc}{c^2 + v'v} \,, \tag{7.7}$$

ou finalement

$$V = \frac{v' + v}{1 + \frac{v'v}{c^2}} \,, \tag{7.8}$$

qui constitue la ***loi de composition relativiste des vitesses colinéaires***.

7.5 Commentaires

On remarquera que cette formule possède les propriétés suivantes :

- $V = c$ si $v = c$ ou $v' = c$, ce qui correspond à l'invariance de la vitesse de la lumière : si un corps ou un signal se déplace à la vitesse de la lumière pour un observateur, il se déplace à la vitesse de la lumière pour tous les observateurs. [1]
- V ne dépasse jamais c si v et v' ne dépassent pas c : si un corps ou un signal se propage à une vitesse inférieure à celle de la lumière pour un observateur, il se propage à une vitesse inférieure à celle de la lumière pour tous les observateurs.
- Si les deux vitesses v et v' sont beaucoup plus petites que la vitesse de la lumière c, le deuxième terme au dénominateur de l'expression (7.8) est négligeable par rapport au premier et la règle de combinaison relativiste se réduit, en très bonne approximation, à la loi familière de combinaison additive, $V \simeq v' + v$.

1. Comme v et v' sont les vitesses relatives de deux observateurs, elles ne peuvent pas être exactement égales à c, toutefois, on peut considérer des vitesses arbitrairement proches de c.

Chapitre 8

Paradoxe des jumeaux

8.1 Introduction

Au Chapitre 5, il a été démontré qu'une horloge en mouvement uniforme prend du retard par rapport à l'horloge portée par l'observateur inertiel qui constate ce mouvement. Ce résultat peut être appliqué au vieillissement d'une personne, considéré comme gouverné par une horloge biologique interne. Si l'on imagine deux jumeaux qui naissent sur la Terre mais qui, un beau jour, se séparent parce que l'un d'eux décide d'entreprendre un long voyage vers une autre partie de l'univers, on conclut que le jumeau qui reste sur Terre pense que son frère vieillit moins vite que lui. Toutefois, l'effet est réciproque, pour le voyageur, c'est son frère resté à la maison qui se maintient plus jeune. Tant que les deux frères sont distants l'un de l'autre, ils peuvent tous deux avoir raison sans contradiction, puisqu'il ne leur est pas possible de comparer objectivement leurs états physiques et mentaux.

Mas si l'on imagine que, passées quelques années, le jumeau voyageur décide de retourner à la maison, un doute surgit : lors des retrouvailles, la comparaison sera possible et, si l'un des frères est réellement plus jeune que l'autre, tous deux devront admettre ce fait. Le présent chapitre analyse cette question intrigante.

8.2 Situation

Soient trois observateurs A, B' et C". L'observateur B' est en mouvement à la vitesse v par rapport à l'observateur A. L'observateur C" est aussi en mouvement à la vitesse v par rapport à l'observateur A, dans la même direction mais ***en sens inverse***.

Initialement, B' et C" se rapprochent de A ; B' est déjà tout près de A mais C" est encore loin. Quand B' passe près de A, tous deux remettent leurs horloges à zéro. Si l'on dénomme *O* cet évènement, on a donc $t_O = t'_O = 0$. Lors de cet évènement, l'observateur B' envoie un premier éclair de lumière à A, qui le reçoit essentiellement instantanément, puisque A et B' sont au même endroit.

L'observateur B' commence alors à s'éloigner de A et à se rapprocher de C". Soit *P* l'évènement de rencontre des observateurs B' et C". On supposera que lors de cet évènement, l'observateur C" règle son horloge selon celle de B', de manière que $t''_P = t'_P$. Quand ils se croisent, aussi bien B' que C" envoient un éclair de lumière vers A. Ces éclairs voyagent côte à côte et sont reçus par A lors du même évènement, qui sera référencé par *R*.

Après sa rencontre avec B', l'observateur C" continue à se rapprocher de A. Quand C" rencontre A, il envoie un second éclair de lumière à A, qui le reçoit essentiellement instantanément. On dénommera *Q* l'évènement de rencontre de C" avec A.

La séquence d'évènements et de mouvements décrite ci-dessus peut être visualisée sur le diagramme de Minkowski de la Figure 8.1.

Quand les observateurs C" et A sont au même endroit, ils peuvent comparer leurs horloges. La question qui se pose est : les horloges de A et C" marquent-elles la même heure, ou encore, a-t-on $t''_Q = t_Q$? Notons que, puisque B' a réglé son horloge sur celle de A et C" a réglé la sienne sur celle de B', le "sens commun" réponderait ***oui*** à cette question.

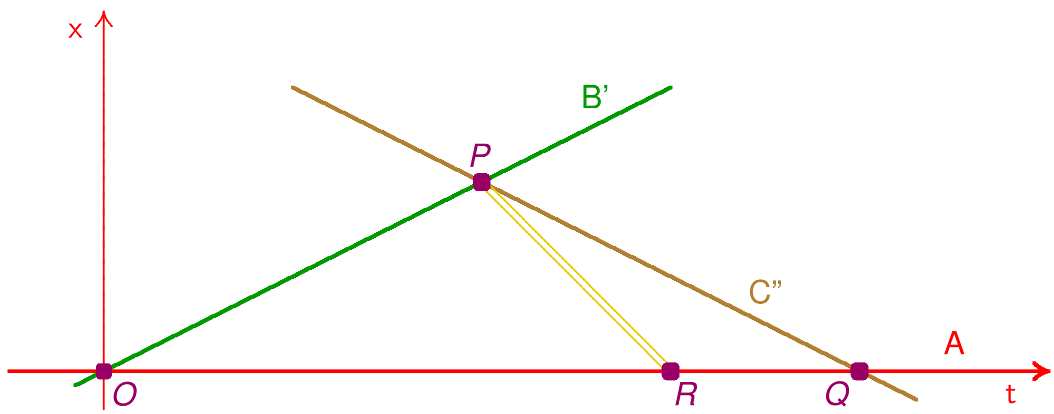

FIGURE 8.1 – *Diagramme de Minkowski montrant la situation considérée dans l'analyse du paradoxe des jumeaux. Les axes du diagramme sont ceux associés au référentiel de l'observateur A. Les lignes d'univers tracées sur le graphique sont associées aux observateurs A, B' et C", et aux éclairs de lumière émis par les observateurs B' et C" quand ils se croisent.*

8.3 Analyse

Soit t'_P le temps indiqué par l'horloge de B' lors de l'évènement *P* de rencontre avec C". Comme C" règle alors son horloge à celle de B', l'horloge de C" indique $t''_P = t'_P$ lors de cet évènement.

Pour l'observateur B', le temps qui s'écoule entre sa rencontre avec A et sa rencontre avec C" est $t'_P - t'_O = t'_P$, puisque l'horloge de B' a éte ajustée de manière que $t'_O = 0$. Comme l'observateur C" s'approche de A à la même vitesse v à laquelle B' s'est éloigné de A, il prend le même temps (mesuré par lui à partir de la rencontre avec B') pour arriver jusqu'à A, c'est à dire que

$$t''_Q - t''_P = t'_P \ . \tag{8.1}$$

Par conséquent, lors de l'évènement *Q* de rencontre avec l'observateur A, l'horloge de C" marque le temps

$$\mathrm{t''}_Q = \mathrm{t''}_P + \mathrm{t'}_P = 2\,\mathrm{t'}_P \ , \tag{8.2}$$

où il a été tenu compte du fait que C” a réglé son horloge de manière que $\mathrm{t''}_P = \mathrm{t'}_P$.

L'intervalle (mesuré par B') d'émission des deux éclairs par B', est $\mathrm{t'}_P - \mathrm{t'}_O = \mathrm{t'}_P$. Soit k le facteur de Bondi reliant B' à A. Par la définition de ce facteur, l'intervalle de réception de ces éclairs par A est

$$\mathrm{t}_R - \mathrm{t}_O = \mathrm{k}(\mathrm{t'}_P - \mathrm{t'}_O) \ . \tag{8.3}$$

Compte tenu du choix de condition initiale $\mathrm{t}_O = \mathrm{t'}_O = 0$, on déduit que, quand il reçoit le second éclair de B', l'horloge de l'observateur A marque le temps

$$\mathrm{t}_R = \mathrm{k}\,\mathrm{t'}_P \ . \tag{8.4}$$

Comme le premier éclair émis par C” accompagne le second éclair émis par B', tel est aussi le temps marqué par l'horloge de A quand il reçoit le premier éclair de C”. Puisque l'observateur C” s'approche de A à la même vitesse que celle à laquelle l'observateur B' s'est éloigné de A, le facteur de Bondi reliant C” à A est $1/\mathrm{k}$ (voir le Chapitre 3). L'intervalle d'émission des deux éclairs par C” est $\mathrm{t''}_Q - \mathrm{t''}_P$, donc l'intervalle de réception de ces éclairs par A est

$$\mathrm{t}_Q - \mathrm{t}_R = \frac{1}{\mathrm{k}}(\mathrm{t''}_Q - \mathrm{t''}_P) \ . \tag{8.5}$$

Par conséquent, quand A reçoit le second éclair de C”, son horloge marque le temps

$$\mathrm{t}_Q = \mathrm{t}_R + \frac{1}{\mathrm{k}}(\mathrm{t''}_Q - \mathrm{t''}_P) = \mathrm{k}\,\mathrm{t'}_P + \frac{1}{\mathrm{k}}\mathrm{t'}_P \ , \tag{8.6}$$

où l'on a fait usage des relations (8.4) et (8.1).

En résumé, les temps marqués par les horloges des observateurs A et C” lors de leur rencontre sont donnés par les expressions (8.6) et (8.2).

8.4 Conclusion

En comparant les expressions (8.6) et (8.2), on constate que les temps t_Q et t''_Q marqués par les horloges de A et C” lors de la rencontre entre ces deux observateurs ne sont pas égaux. Leur quotient est

$$\frac{\mathrm{t}_Q}{\mathrm{t}''_Q} = \frac{\mathrm{k} + \frac{1}{\mathrm{k}}}{2} \ , \tag{8.7}$$

En utilisant l'expression (4.10) du facteur k en fonction de la vitesse relative v, on obtient (voir le calcul réalisé lors de la discussion de la dilatation du temps, au Chapitre 5) :

$$\boxed{\mathrm{t}_Q = \gamma\,\mathrm{t}''_Q \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/\mathrm{c}^2}} > 1 \ .} \tag{8.8}$$

Ce résultat est formellement identique à celui qui a été obtenu lors de la discussion de la dilatation du temps et, en fait, peut être interprété comme une manifestation de cette dilatation.

Toutefois, la situation ici est significativement différente de celle qui a été considérée au Chapitre 5. ***L'effet ici n'est pas réciproque***. Comme A et C" comparent leurs horloges ***lors du même évènement*** (leur rencontre), ils doivent tomber d'accord sur la question de savoir se l'une est en avance sur l'autre.

8.5 Illustration

On peut invoquer cette conclusion pour répondre à la question soulevée dans l'introduction de ce chapitre.

L'observateur A habite sur Terre et est père des deux fils jumeaux, Jean et Pierre. L'observateur B', un extraterrestre qui voyage dans son vaisseau spatial, croise A et enlève Jean, alors que Pierre reste sur Terre avec A. Après quelques années de voyage, le vaisseau de B' croise un autre vaisseau qui vient en sens inverse, à la même vitesse (par rapport à la Terre). Aux commandes de ce vaisseau se trouve l'observateur C", un autre extraterrestre. Sentant la nostalgie de son foyer, Jean se transfère sur le vaisseau de C" et, après quelques années de voyage en plus, il est de retour sur Terre et retrouve son père A et son frère Pierre.

Quand A compare ses jumeaux réunis, il remarque que Jean***, qui a voyagé, est maintenant plus jeune que*** Pierre***, qui est resté à la maison!*** Il faut souligner que tous doivent être d'accord là-dessus. ***La situation n'est pas symétrique***, car Jean est passé d'un référentiel inertiel à l'autre, alors que Pierre est toujours resté dans le même référentiel inertiel. En se transférant de la Terre sur le premier vaisseau, du premier vaisseau sur le second, et du second vaisseau à nouveau sur la Terre, Jean a nécessairement ***subi des accélérations***. En contraste, Pierre n'a subi aucune accélération (dans la mesure où il est permis de considérer la Terre comme constituant un référentiel inertiel [1]).

Le drame imaginé ci-dessus reste, pour l'instant, du domaine de la fiction scientifique uniquement. Toutefois, l'effet physique impliqué est vérifié par des expériences de haute précision qui comparent des horloges transportées par des avions à des horloges au repos sur Terre.

1. Cette supposition néglige évidemment le mouvement orbital de la Terre autour du Soleil.

Annexe A

Exemples

A.1 Facteur de Bondi - exemple

Le diagramme de la Figure A.1 illustre la situation du point de vue de l'observateur A.

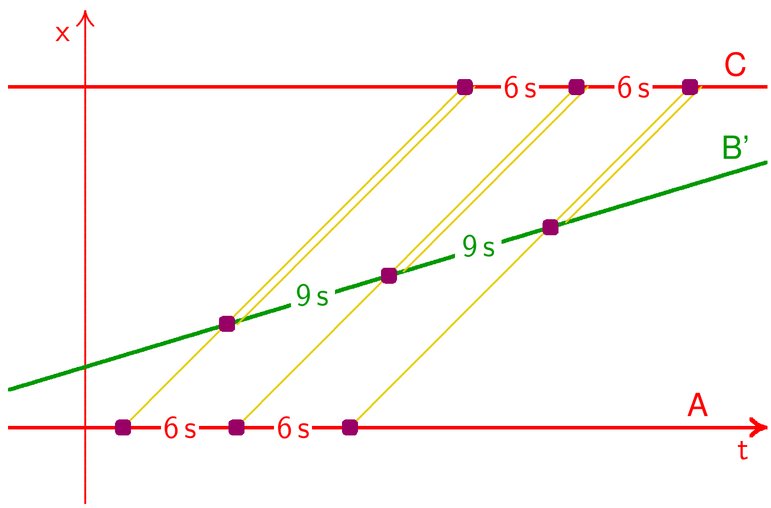

FIGURE A.1 – *Diagramme de Minkowski montrant la situation considérée pour illustrer la discussion du facteur de Bondi. Les observateurs A et C sont distants l'un de l'autre mais en repos l'un par rapport à l'autre. L'observateur B' s'éloigne de A et se rapproche de C. Les intervalles de temps mesurés par chaque observateur entre les évènements d'émission et de détection des éclairs de lumière sont indiqués sur le graphique.*

Les éclairs de lumière émis par A à intervalles de $6\,\mathrm{s}$ sont reçus par l'observateur B', qui ***s'éloigne*** de A, à intervalles de $9\,\mathrm{s}$. Par conséquent, le ***facteur de Bondi*** qui caractérise la relation cinématique entre A et B', vaut

$$k = \frac{9\,\mathrm{s}}{6\,\mathrm{s}} = \frac{3}{2} \,. \tag{A.1}$$

Chaque fois que B' reçoit un éclair de lumière venu de A, lui aussi émet un éclair de lumière. Les éclairs de lumière émis par A et B' voyagent côte à côte jusqu'à C, qui les reçoit simultanément. L'observateur C est au repos par rapport à A et l'observateur B' se rapproche de C à la même vitesse (en valeur absolue) que celle à laquelle il s'éloigne de A.

Comme C est au repos par rapport à A, il reçoit les éclairs de A à intervalles égaux aux intervalles d'émission, de $6\,\mathrm{s}$. Donc, C reçoit aussi les éclairs émis par B' à intervalles de $6\,\mathrm{s}$. Par conséquent, pour ces éclairs, le quotient entre les intervalles de réception et d'émission est

$$\frac{6\,\mathrm{s}}{9\,\mathrm{s}} = \frac{2}{3} = \frac{1}{k}\,. \tag{A.2}$$

Écrit en toutes lettres : ***le facteur de Bondi relatif à deux observateurs qui se rapprochent l'un de l'autre à une vitesse relative donnée est l'inverse de celui associé à deux observateurs qui s'éloignent à la même vitesse relative (en valeur absolue)***.

A.2 Calcul de la vitesse relative à partir du facteur de Bondi - exemple

Le diagramme présenté à la Figure A.2 illustre la situation du point de vue de l'observateur A. Soit $k = 3/2$ le facteur de Bondi reliant les observateurs A et B'. Quand les deux observateurs se croisent, tous deux remettent leurs montres à zéro et ils échangent des éclairs de lumière.

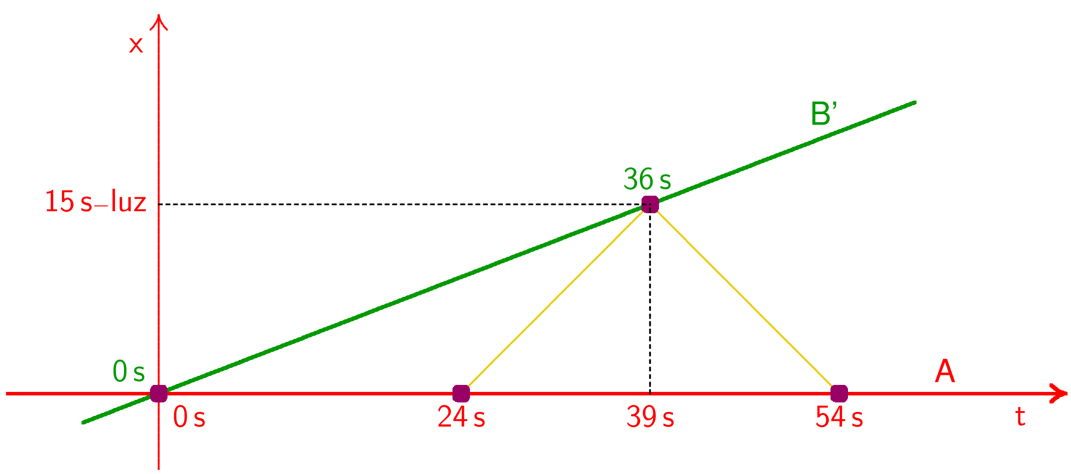

FIGURE A.2 – *Diagramme de Minkowski montrant la situation considérée pour illustrer la relation entre le facteur de Bondi et la vitesse relative d'une paire d'observateurs. On peut voir les lignes d'univers des deux observateurs A et B' et du (second) éclair de lumière envoyé par le premier observateur et réfléchi par le second. La détermination graphique des coordonnées de l'évènement de réflection, dans le référentiel de A, est explicitée. Les valeurs indiquées correspondent au cas* $k = 3/2$.

Quelques instants plus tard, B' reçoit un second éclair de lumière venu de A ; on supposera que la montre de B' marque $36\,\mathrm{s}$ lors de cet évènement. L'intervalle de réception des deux éclairs par B' est donc de $36\,\mathrm{s}$. Par conséquent, l'intervalle d'émission des éclairs par A a été de

$$\frac{36\,\mathrm{s}}{k} = 36\,\mathrm{s} \div \frac{3}{2} = 24\,\mathrm{s}\ . \tag{A.3}$$

Puisque le premier éclair a été envoyé par A quand sa montre marquait $0\,\mathrm{s}$, le second éclair a été émis quand la montre de A marquait $24\,\mathrm{s}$.

L'observateur B' renvoie l'éclair à A. L'intervalle d'émission entre les deux éclairs envoyés à A par B' est de $36\,\mathrm{s}$. L'intervalle de réception de ces éclairs par A est donc de

$$36\,\mathrm{s} \times k = 36\,\mathrm{s} \times \frac{3}{2} = 54\,\mathrm{s}\ . \tag{A.4}$$

Puisque le premier éclair a été reçu par A à l'instant $0\,\mathrm{s}$, la montre de A marque $54\,\mathrm{s}$ quand il reçoit l'éclair réfléchi, qui est le second éclair venu de B'.

Pour A, l'évènement de réflection du second éclair a lieu à l'instant médian entre l'instant d'émission et l'instant de réception, c'est-à-dire quand la montre de A marque

$$\frac{24\,\mathrm{s} + 54\,\mathrm{s}}{2} = 39\,\mathrm{s}\ . \tag{A.5}$$

On peut en déduire que, pour A, le second éclair de lumière qu'il a envoyé a pris

$$39\,\mathrm{s} - 24\,\mathrm{s} = 15\,\mathrm{s} \tag{A.6}$$

pour arriver à l'évènement de réflection par B'. Il s'en suit que cet évènement a eu lieu à une distance de $15\,\mathrm{s}$–lumière. Comme B' était présent à l'évènement de réflection (c'est lui qui l'a provoqué!), A peut conclure de cette analyse que B' a parcouru $15\,\mathrm{s}$–lumière en $39\,\mathrm{s}$. La vitesse de B' par rapport à A est donc de

$$v = \frac{15\,\mathrm{s\text{–}lumière}}{39\,\mathrm{s}} = \frac{5}{13}\,c\ . \tag{A.7}$$

On pourra facilement confirmer que la relation entre k et v, dans cet exemple, correspond à la formule générale [voir la relation (4.10)]

$$k = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\ . \tag{A.8}$$

Il suffira de vérifier que

$$\sqrt{\frac{1+5/13}{1-5/13}} = \frac{3}{2}\ . \tag{A.9}$$

A.3 Dilatation du temps - exemple

On peut considérer la situation présentée à la Section A.2 et visualisée sur la Figure A.2, tirant parti d'une bonne partie de l'analyse associée. Le facteur de Bondi reliant les observateurs A et B' est $k = 3/2$.

Quand les deux observateurs se croisent, tous deux remettent leurs montres à zéro ; donc, lorsque cet évènement a lieu, la montre de A marque le temps $0\,\mathrm{s}$ et la montre de B' marque $0\,\mathrm{s}$ aussi.

Toutefois, selon l'argument développé à la Section A.2, quand a lieu la réflection, par le miroir porté par B', du second éclair envoyé par A, la montre de B' marque $36\,\mathrm{s}$ mais la montre de A indique déjà $39\,\mathrm{s}$. Il s'en suit que, pour A, ***la montre en mouvement*** portée par B' ***retarde***. Le quotient entre les intervalles de temps mesurés par la montre au repos et par la montre en mouvement, connu sous le nom de ***facteur*** γ ***de Lorentz*** est

$$\gamma = \frac{39\,\mathrm{s}}{36\,\mathrm{s}} = \frac{13}{12}\,. \tag{A.10}$$

Comme cela a été démontré à la section antérieure, dans cet exemple, la vitesse de l'observateur B' par rapport à l'observateur A est $v = 5/13 \times c$. La relation entre le facteur de Lorentz γ et la vitesse relative v, déduite au Chapitre 5, est

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \tag{A.11}$$

Il est facile de confirmer que cette relation est satisfaite dans le présent exemple ; il suffit de vérifier que

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (5/13)^2}} = \frac{13}{12}\,. \tag{A.12}$$

A.4 Contraction des longueurs - exemple

Comme cela a été expliqué au Chapitre 6, on considérera une plateforme qui possède une longueur propre (au repos) donnée et on demandera quelle est la longueur attribuée à cette même plateforme par un observateur pour lequel elle se déplace à une certaine vitesse.

Dans le présent exemple numérique, on supposera que la longueur propre de la plateforme est [1]

$$L_0 = 26\,\mathrm{s{-}lumière} \tag{A.13}$$

et que la plateforme se meut à la vitesse

$$v = \frac{5}{13}\,c \tag{A.14}$$

ce qui, comme cela a été calculé aux Sections A.2 et A.3, correspond au facteur de Bondi

$$k = \frac{3}{2} \tag{A.15}$$

et au facteur de Lorentz

$$\gamma = \frac{13}{12}\,. \tag{A.16}$$

1. C'est une plateforme de longueur tout à fait respectable, environ 20 fois la distance de la Terre à la Lune!

On dénommera A l'observateur qui réalise la mesure de la longueur de la plateforme en mouvement. Le procédé utilisé par A consiste à envoyer des éclairs de lumière qui doivent être réfléchis simultanément (du point de vue de A) par des miroirs portés par des observateurs B' et C' qui sont situés à chaque extrémité de la plateforme et sont immobiles par rapport à celle-ci.

Le diagramme de la Figure A.3 illustre la situation du point de vue de l'observateur A. L'observateur B' passe le premier tout près de l'observateur A ; quelque temps après, l'observateur C' passe près de l'observateur A et on supposera que, quand les deux observateurs A et C' se croisent, tous deux remettent leurs montres à zéro. Donc, lors de cet évènement, la montre de A marque 0 s et la montre de C' marque 0 s aussi (évènement *O*).

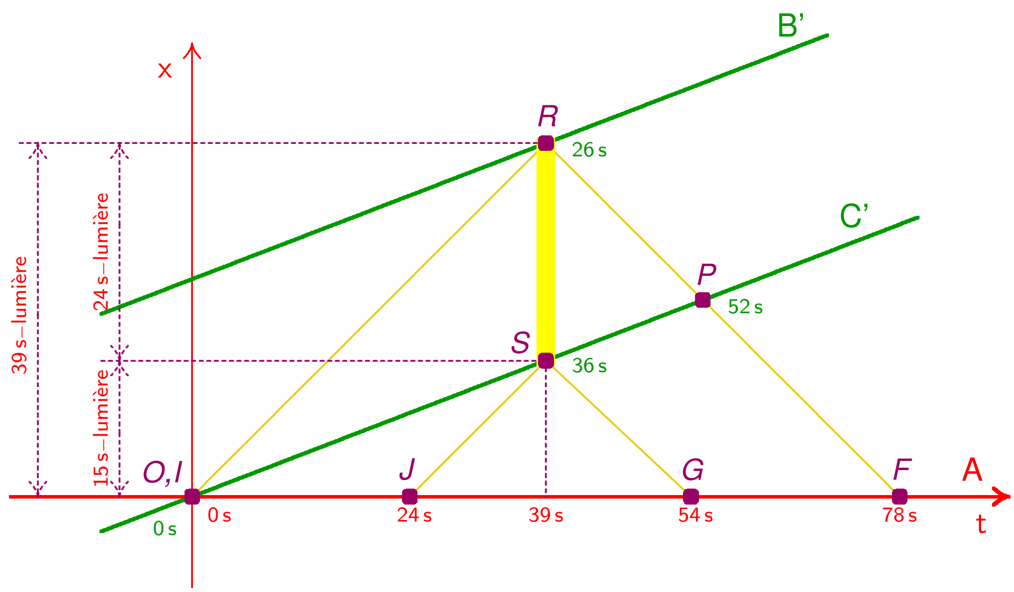

FIGURE A.3 – *Diagramme de Minkowski montrant la situation considérée dans l'analyse de la contraction de la longueur d'une plateforme. Les axes du diagramme sont associés au référentiel de l'observateur A pour lequel la plateforme est en mouvement. On peut voir les lignes d'univers de deux observateurs B' et C' situés aux extrémités de la plateforme et immobiles par rapport à celle-ci. Pour A, les deux éclairs de lumière qu'il envoie sont réfléchis simultanément par les miroirs portés par B' et C'. La détermination graphique de la longueur attribuée à la plateforme par l'observateur A est explicitée.*

Pour développer l'argument basé sur l'usage du facteur de Bondi, il convient de supposer que quand C' passe près de A, celui-ci envoie un premier éclair de lumière qui est réfléchi instantanément par le miroir de C' et revient immédiatement à A. Lors de ce même évènement, l'observateur A envoie également un éclair vers l'observateur B' (évènement *I*, qui coïncide avec l'évènement *O*).

Quelque temps après, l'observateur A envoie un autre éclair de lumière qui sera réfléchi par le miroir de C'. Comme cela a été discuté au Chapitre 6, l'observateur A doit choisir le temps d'émission de cet éclair de manière que, du point de vue de A, la réflection par le miroir de C' ait lieu simultanément avec la réflection de l'éclair qui a été envoyé sur le miroir de B'. Sachant les valeurs de la longueur propre de la plateforme et du facteur de

Bondi, l'observateur A peut calculer ce temps [voir l'équation (6.11), sans oublier que $L' = L_0$] comme

$$\frac{2\,k\,L_0}{(1+k^2)\,c} = \frac{2\times\frac{3}{2}}{1+(\frac{3}{2})^2}\times\frac{26\,\text{s–lumière}}{1\,\text{s–lumière/s}} = 24\,\text{s}\ . \tag{A.17}$$

Donc, A doit envoyer le second éclair vers C' quand sa montre marque 24 s (évènement *J*).

Puisque l'intervalle d'émission des deux éclairs envoyés par A vers C' est de 24 s, l'intervalle de réception par C' est de

$$\frac{3}{2}\times 24\,\text{s} = 36\,\text{s}\ . \tag{A.18}$$

Par conséquent, quand C' reçoit le second éclair venant de A, sa montre indique 36 s (évènement *S*). Comme l'intervalle de réflection des deux éclairs par le miroir de C' est de 36 s, l'intervalle de réception, par A, des éclairs réfléchis doit être de

$$\frac{3}{2}\times 36\,\text{s} = 54\,\text{s}\ . \tag{A.19}$$

Le temps indiqué par la montre de A quand il reçoit le second éclair réfléchi par C' est donc 54 s (évènement *G*).

Par l'invariance de la vitesse de la lumière, le temps attribué par A à l'évènement de réflection, par C', du second éclair (évènement *S*) doit être la moyenne entre le temps d'émission et le temps de réception de l'éclair réfléchi, c'est à dire,

$$\frac{24\,\text{s}+54\,\text{s}}{2} = 39\,\text{s}\ . \tag{A.20}$$

Étant donné que, durant cet intervalle de temps, l'observateur C' s'est éloigné de A à la vitesse $\frac{5}{13}c$, on conclut facilement que l'évènement de réflection *S* a lieu à une distance de A égale à :

$$\frac{5}{13}\times\frac{1\,\text{s–lumière}}{\text{s}}\times 39\,\text{s} = 15\,\text{s–lumière}\ . \tag{A.21}$$

Il convient de considérer maintenant l'éclair de lumière envoyé par A vers le miroir de B'. Il a été envoyé lorsque C' a croisé A et remis sa montre à zéro, donc à 0 s, suivant les montres de B' et C'. Pour ces observateurs, il a pris

$$\frac{L_0}{c} = \frac{26\,\text{s–lumière}}{\frac{1\,\text{s–lumière}}{\text{s}}} = 26\,\text{s} \tag{A.22}$$

pour aller jusqu'à B' ; donc, quand son miroir réfléchit cet éclair, la montre de B' marque 26 s (évènement *R*). L'éclair réfléchi prend le même temps pour retourner jusqu'à C' ; donc, quand il passe près de C', la montre de C' marque 52 s (évènement *P*). Si l'on considère, avec cet éclair réfléchi, celui qui a été réfléchi instantanément quand C' est passé près de A, on voit que l'intervalle entre les passages près de C' de ces deux éclairs a été de 52 s, selon la montre de C'. Par conséquent, l'intervalle de réception par A a été de

$$\frac{3}{2}\times 52\,\text{s} = 78\,\text{s} \tag{A.23}$$

et par conséquent, quand l'observateur A reçoit l'éclair réfléchi par B', sa montre marque 78 s (évènement *F*). Pour l'observateur A, l'évènement de réflection de l'éclair par B' a eu lieu à l'instant médian entre l'instant d'émission et l'instant de réception de l'éclair réfléchi, donc à l'instant

$$\frac{0\,\mathrm{s}+78\,\mathrm{s}}{2}=39\,\mathrm{s}\;. \tag{A.24}$$

Ces calculs confirment donc que les évènements de réflection aux deux extrémités de la plateforme (évènements *R* et *S*) ont lieu simultanément pour l'observateur A, comme cela devait être le cas pour que toute cette opération corresponde vraiment à une mesure, par A, de la longueur de la plateforme. Pour compléter le calcul de cette longueur, il suffit de déterminer aussi la distance entre l'observateur A et l'extrémité la plus distantes de la plateforme au moment de la mesure. Comme l'éclair de lumière réfléchi par B' a pris $39\,\mathrm{s}$ pour arriver jusqu'à B', cette distance est évidemment

$$\frac{1\,\mathrm{s{-}lumière}}{\mathrm{s}}\times 39\,\mathrm{s}=39\,\mathrm{s{-}lumière}\;. \tag{A.25}$$

La longueur mesurée par A est la différence entre les distances, par rapport à lui, des deux extrémités de la plateforme à l'instant de la mesure :

$$39\,\mathrm{s{-}lumière}-15\,\mathrm{s{-}lumière}=24\,\mathrm{s{-}lumière}\;. \tag{A.26}$$

On peut vérifier immédiatement que ce résultat est en accord avec la théorie de la contraction des longueurs [voir la relation (6.18)] :

$$\frac{L_0}{\gamma}=\frac{26\,\mathrm{s{-}lumière}}{\frac{13}{12}}=24\,\mathrm{s{-}lumière}\;. \tag{A.27}$$

Il convient de souligner que les évènements *R* et *S* de réflection des éclairs aux deux extrémités de la plateforme, bien qu'ils soient simultanés pour l'observateur A – tous deux ont lieu quand la montre de cet observateur marque $39\,\mathrm{s}$ – ne sont pas simultanés pour les observateurs B' et C'. L'évènement *R* a lieu quand la montre de B' marque $26\,\mathrm{s}$; par contre, l'évènement *S* a lieu quand la montre de C' (et donc aussi celle de B', puisque ces deux observateurs sont au repos l'un par rapport à l'autre) marque $36\,\mathrm{s}$. On a ici un exemple de la ***relativité de la simultanéité***, une caractéristique notoire de la Relativité Restreinte : des événements qui ont lieu simultanément, mais à des endroits différents, pour un observateur donné, n'ont, en général, pas lieu simultanément pour un autre observateur en mouvement par rapport au premier.

A.5 Combinaison des vitesses - exemple

L'observateur B' est en mouvement par rapport à l'observateur A et l'observateur C" est en mouvement par rapport à l'observateur B'.

Soient $k=3/2$ le facteur de Bondi reliant B' à A et $k'=4/3$ le facteur de Bondi reliant C" à B'.

L'observateur A émet des éclairs de lumière à intervalles de $6\,\mathrm{s}$. Ces éclairs sont reçus par B' à intervalles de

$$6\,\mathrm{s}\times\frac{3}{2}=9\,\mathrm{s}\;. \tag{A.28}$$

Chaque fois que B' reçoit un éclair venu de A, il émet lui aussi un éclair. Ces éclairs, émis par B' à intervalles de $9\,\mathrm{s}$, sont reçus par C" à intervalles de

$$9\,\mathrm{s} \times \frac{4}{3} = 12\,\mathrm{s}\ . \tag{A.29}$$

Le diagramme de la Figure A.4 illustre cette situation du point de vue de l'observateur A.

Comme les éclairs venus de A voyagent côte à côte avec les éclairs émis par B', ils sont aussi reçus par C" à intervalles de $12\,\mathrm{s}$. Il s'en suit que le facteur de Bondi reliant C" à A est

$$K = \frac{12\,\mathrm{s}}{6\,\mathrm{s}} = 2\ . \tag{A.30}$$

Ce résultat illustre évidemment la combinaison multiplicative des facteurs de Bondi, puisque

$$\frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = 2\ . \tag{A.31}$$

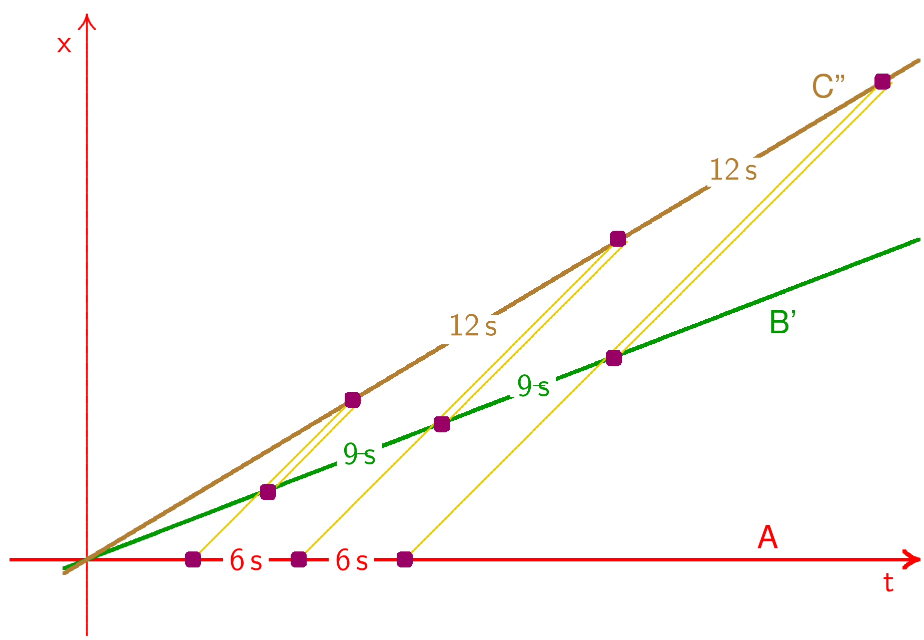

FIGURE A.4 – *Diagramme de Minkowski montrant la situation considérée comme illustration de la combinaison des facteurs de Bondi relatifs à des mouvements dans la même direction. Les axes du diagramme se rapportent au référentiel de l'observateur A. On peut voir les lignes d'univers des observateurs A, B' et C", et des éclairs de lumière émis à intervalles réguliers par les observateurs A et B'. Les intervalles d'émission et/ou de réception des éclairs, mesurés par l'observateur impliqué, sont indiqués sur le graphique.*

Comme cela a été discuté au Chapitre 4, la vitesse relative v est donnée en fonction du facteur k par [voir la relation (4.8)]

$$v = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}\,c\ . \tag{A.32}$$

Par conséquent, la vitesse de B' par rapport à A est

$$\mathrm{v} = \frac{(3/2)^2 - 1}{(3/2)^2 + 1}\,\mathrm{c} = \frac{5}{13}\,\mathrm{c} \tag{A.33}$$

et la vitesse de C" par rapport à B' est

$$\mathrm{v}' = \frac{(4/3)^2 - 1}{(4/3)^2 + 1}\,\mathrm{c} = \frac{7}{25}\,\mathrm{c}\,. \tag{A.34}$$

En utilisant le résultat obtenu par la combinaison des facteurs de Bondi, on peut également calculer la vitesse V de C" par rapport à A :

$$\mathrm{V} = \frac{2^2 - 1}{2^2 + 1}\,\mathrm{c} = \frac{3}{5}\,\mathrm{c}\,. \tag{A.35}$$

La règle de combinaison relativiste des vitesses, c'est à dire [voir la formule (7.8)],

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{v}' + \mathrm{v}}{1 + \frac{\mathrm{v}'\mathrm{v}}{\mathrm{c}^2}}\,, \tag{A.36}$$

correspond donc à la relation arithmétique

$$\frac{\frac{7}{25}\,\mathrm{c} + \frac{5}{13}\,\mathrm{c}}{1 + \frac{1}{\mathrm{c}^2} \times \frac{7}{25}\,\mathrm{c} \times \frac{5}{13}\,\mathrm{c}} = \frac{3}{5}\,\mathrm{c}\,, \tag{A.37}$$

laquelle est facilement vérifiée.

Il convient de noter que, selon la cinématique de Galilée et Newton, pour laquelle la loi de combinaison des vitesses colinéaires est simplement la somme, le résultat obtenu pour la vitesse de C" par rapport à A serait

$$\mathrm{V}_{\mathrm{GN}} = \mathrm{v}' + \mathrm{v} = \frac{7}{25}\,\mathrm{c} + \frac{5}{13}\,\mathrm{c} = \frac{216}{325}\,\mathrm{c} = 0,665\,\mathrm{c}\,. \tag{A.38}$$

On peut constater que, dans l'exemple considéré, cette valeur diffère du résultat fourni par la Relativité d'Einstein $\mathrm{V} = 0,6\,\mathrm{c}$ d'environ 10 %. Si les vitesses v e v' impliquées étaient toutes deux très proches de la vitesse de la lumière, la différence s'approcherait d'un facteur 2, puisque V_{GN} serait proche de $2\,\mathrm{c}$, alors que V resterait inférieure à c.

A.6 Paradoxe des jumeaux - exemple

Sur la planète Terre, considérée ici comme un référentiel inertiel, vit un observateur A qui est père de deux fils jumeaux, Jean et Pierre. Un beau jour, alors que Jean a 5 ans et, évidemment, Pierre aussi a 5 ans, un vaisseau spatial piloté par l'observateur B' passe tout près de la Terre.

Passionné d'aventures spatiales et de Relativité Restreinte, A décide de confier un des jumeaux, Jean, au voyageur B', alors que l'autre jumeau, Pierre, reste à la maison.

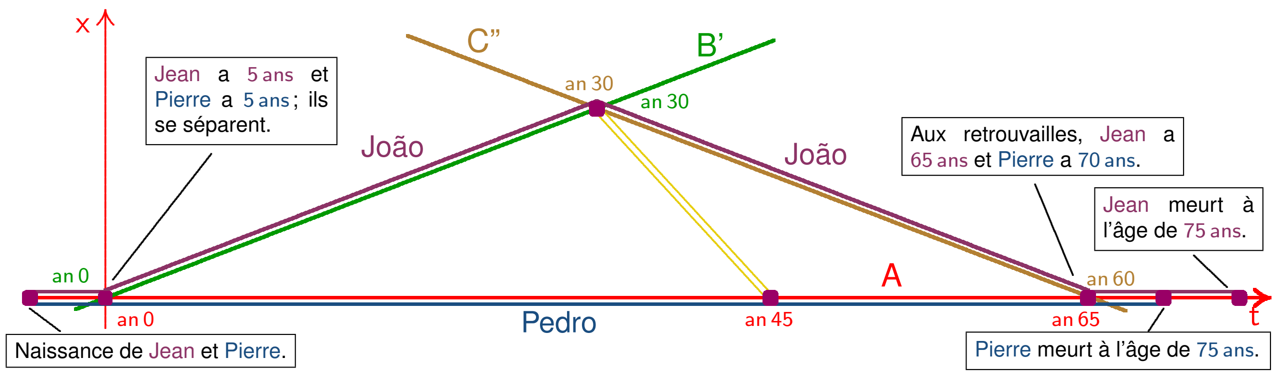

FIGURE A.5 – *Diagramme de Minkowski montrant la situation considérée comme illustration du paradoxe des jumeaux. Les axes du diagramme se rapportent au référentiel de l'observateur A. On peut voir les lignes d'univers des observateurs A, B' et C", et des éclairs de lumière émis par les observateurs B' et C" quand ils se croisent. Les lignes d'univers des deux jumeaux, Jean et Pierre sont également tracées, ainsi que les descriptions de quelques évènements importants de leurs vies.*

Plusieurs années plus tard, le vaisseau de B' croise un autre vaisseau, piloté par un observateur C", qui voyage dans la direction opposée, s'approchant de la Terre à la même vitesse que celle à laquelle B' s'en éloigne. Souffrant d'une grande nostalgie de sa famille et de sa maison, Jean décide de profiter de l'aubaine et se transfère sur le vaisseau de C". Quand ledit vaisseau arrive sur Terre, ont lieu les retrouvailles de Jean avec son frère jumeau Pierre et son père A.

Le diagramme de la Figure A.5 illustre la situation du point de vue de l'observateur A, supposant que la vitesse de B' par rapport à la Terre et à A est de $\frac{5}{13}$ c, ce qui correspond au facteur de Bondi $k = 3/2$ et au facteur de Lorentz $\gamma = 13/12$ [voir les Sections A.2 et A.3].

Pour simplifier, on supposera que, quand les deux observateurs A et B' se rencontrent, tous deux remettent leurs horloges à zéro. Pour développer l'argument basé sur l'utilisation du facteur de Bondi, il est commode de supposer que, lors de cet évènement, l'observateur B' envoie un premier éclair de lumière à A, qui le reçoit instantanément, puisque les deux observateurs sont au même endroit.

On admettra que 30 ans plus tard (selon sa propre horloge), B' croise C", qui voyage en sens inverse et se rapproche de la Terre et de A à la même vitesse $\frac{5}{13}$ c. Le facteur de Bondi reliant C" à A est donc $1/k = 2/3$.

Quand C" croise B', il ajuste son horloge à celle de B', qui marque 30 ans à ce moment. Puisqu'il a accompagné B' dans son voyage, Jean a vieilli de 30 ans durant cette partie de son voyage et a donc maintenant

$$5\,\text{ans} + 30\,\text{ans} = 35\,\text{ans}\ . \tag{A.39}$$

À ce moment, il abandonne le vaisseau de B' et commence son voyage de retour, sur le vaisseau de C".

Quand B' croise C", il envoie un second éclair de lumière vers A. Comme l'intervalle d'émission, par B', de ses deux éclairs a été de 30 ans, l'intervalle de réception de ces éclairs par A, est de

$$\frac{3}{2} \times 30\,\text{ans} = 45\,\text{ans}\ , \tag{A.40}$$

ce qui signifie que, quand A reçoit le second éclair de B', son horloge marque 45 ans.

Quand C" croise B', lui aussi envoie un éclair de lumière à A, qui le reçoit également quand son horloge indique 45 ans.

Comme C" s'approche de A à la même vitesse à laquelle B' s'est éloigné, il lui faut 30 ans, d'après sa propre horloge, pour atteindre A. Comme Jean accompagne C", il vieillit de 30 ans pendant cette partie du voyage. Par conséquent, durant tout son voyage, il a vieilli de

$$30\,\text{ans} + 30\,\text{ans} = 60\,\text{ans} \tag{A.41}$$

et, au moment des retrouvailles avec son père A et son frère Pierre, il a

$$5\,\text{ans} + 60\,\text{ans} = 65\,\text{ans}\ . \tag{A.42}$$

On peut imaginer que, quand C" rencontre A, il envoie un second éclair à A, qui le reçoit instantanément puisque ces deux observateurs sont alors au même endroit. Par la définition du facteur de Bondi, l'intervalle de réception par A des deux éclairs émis par C" est de

$$\frac{2}{3} \times 30\,\text{ans} = 20\,\text{ans}\ . \tag{A.43}$$

A partir de ces résultats, on déduit que, lors de sa rencontre avec C", l'horloge de A marque

$$45\,\text{ans} + 20\,\text{ans} = 65\,\text{ans}\ . \tag{A.44}$$

Puisque Pedro est resté tout le temps aux côtés de A, il a vieilli de 65 ans et a donc

$$5\,\text{ans} + 65\,\text{ans} = 70\,\text{ans} \tag{A.45}$$

lors de sa rencontre avec C", qui est aussi le moment de ses retrouvailles avec son frère jumeau Jean.

On conclut donc que, lors des retrouvailles, Jean a 65 ans et Pierre a 70 ans. Écrit en toutes lettres : ***le jumeau qui a fait un voyage d'aller et retour a vieilli plus lentement que l'autre, qui est resté sur place***.

On peut vérifier que le quotient entre le vieillissement de Jean, qui a voyagé, et celui de Pierre, qui est resté sur place, est donné par l'inverse du facteur de Lorentz, comme le prévoit la formule (8.8) :

$$\frac{60\,\text{ans}}{65\,\text{ans}} = \frac{12}{13} = \frac{1}{\gamma}\ . \tag{A.46}$$

Si les deux jumeaux sont biologiquement identiques, il est permis d'imaginer que tous deux meurent quand ils atteignent le même âge biologique, 75 ans par exemple. Néanmoins, quand Pierre mourra, à l'âge de 75 ans, Jean aura seulement 70 ans et il passera les 5 dernières années de sa vie à pleurer la perte de son frère Pierre.

Bibliographie

[] **Hermann Bondi**, *Relativité et Bon Sens : une Nouvelle Approche des Théories d'Einstein*, Dunod, Malakoff, France, 1968.